Analemma[1], die Zeitgleichung: Warum ist aus unserer Sicht die Sonne so unpünktlich?

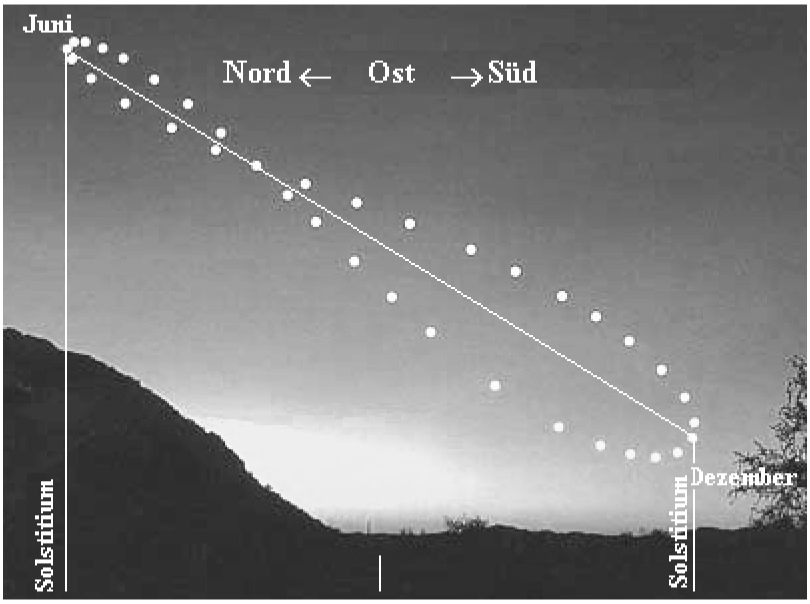
von

Christian Strutz[2]

Wenn mir jemand sagt:"Du kommst aber pünktlich wie die Sonnenuhr!", so darf ich dies im Zeitalter der caesium-genauen Funkuhren nur viermal im Jahr als Kompliment auffassen. Ausserhalb dieser Termine sollte ich in mich gehen und um Vergebung bitten.

Würden wir an einem sonnensicheren Standort der nördlichen Hemisphäre alle 10 Tage zur gleichen Uhrzeit, etwa um 8 Uhr 30, die Sonne fotografieren, so entstünde ein der Abb.1 ähnliches Bild.

Abbildung 1
Ein Analemma am Himmel



Diese mehr oder weniger schiefliegende „Acht“ der über das Jahr verteilten Sonnen wird Análemma genannt. Dass im Dezember die Sonne weiter südlich aufgeht und niedriger steht als im Juni, ist uns klar. Was aber verursacht die „Bäuche“ des Analemmas, den dickeren Winterbauch und den wesentlich dünneren Sommerkopf? Der folgende Text soll dazu dienen, dieses Phänomen zu erklären mit dem Ziel, das Analemma mathematisch so exakt zu formulieren, dass unser Computer seine spezielle Form nachzeichnen kann.

Zunächst müssen wir uns, wenigstens eine kurze Zeit lang, von unserem gewohnten noch-ptolemäischen Weltbild trennen:

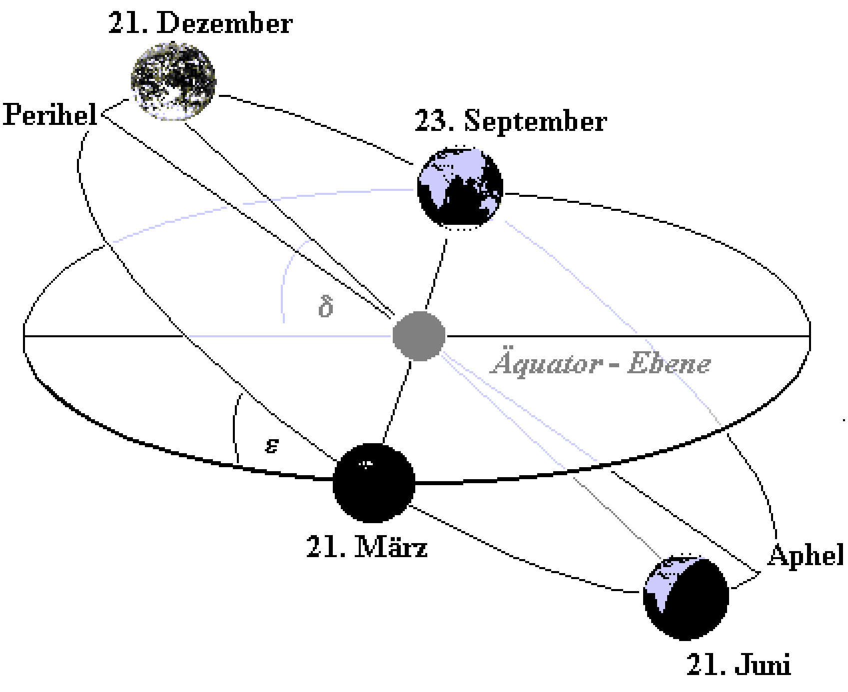
- Die Tatsache, dass für uns die Sonne auf- und untergeht, ist eine Folge der Erdrotation. Eine siderische Rotationsperiode, d.h. die Zeit, die vergeht, damit von uns aus der gleiche Stern zu gleicher Uhrzeit die gleiche Peilung aufweist, beträgt nicht 24 sondern etwa 23 Stunden 56 Minuten und 4 Sekunden[3]. Dies hat zur Folge, dass im Tagesablauf die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der Sonne 15.04° pro Stunde beträgt und dass sich die Erde alle vier

Jahre einmal zusätzlich um sich selbst drehen muss, um mit unserem gregorianischen Kalender in Einklang zu bleiben.

- Im Laufe eines Jahres bewegt sich die Erde einmal um die Sonne herum. Die Erdbahn befindet sich auf einer Ebene. Auf ihrem Umlauf beschreibt die Erde eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet (Erstes Keplersches Gesetz).
- Der Weg vom kürzesten Abstand zur Sonne (Perihel) zum nächsten dauert 365.25636 Tage (siderisches Jahr). Von der Sonne aus gesehen überdeckt der Radiusvektor Sonne-Erde in gleichen Zeiten gleiche Flächen, so dass sich die Erde im Perihel mit 30.29 km/s schneller bewegt als mit 29.29 km/s im sonnenfernsten Punkt, dem Aphel (Zweites Keplersches Gesetz). Die relative Abweichung dieser Extremgeschwindigkeiten vom Mittelwert, der Kreisbahngeschwindigkeit mit 29.79 km/s, entspricht mit 1.67% oder 0.016711 der numerischen Exzentrizität der Bahnellipse.
- Die Erdbahn schneidet die zur Erde gehörende Äquatorebene unter dem Winkel ε, der Schiefe der Ekliptik. Der Frühlingspunkt, etwa am 21. März, und der Herbstpunkt um den 23. September herum sind die Schnittpunkte. Für den Weg von einem Frühlingspunkt zum nächsten benötigt die Erde nur 365.2422 Tage (tropisches Jahr), weil sie diesem Punkt entgegen fährt und durch den Effekt der Aberration Zeit spart.

Die Abbildung 2 fasst diese Punkte zeichnerisch zusammen und zeigt die Ursache der Jahreszeiten auf der nördlichen und südlichen Erdhalbkugel.

Abbildung 2
Jahreszeiten als Folge der Ekliptik



Da wir die Freiheit haben, jedes beliebige Koordinatensystem zu benutzen, solange die Größen- und Winkelverhältnisse stimmen, steht für uns - im Gegensatz zu schiefstehenden Globen, die es zu kaufen gibt - die Erde senkrecht im Raum: Nordpol nach „oben“, Südpol nach „unten“. Auch schadet es der Sonne nicht, von der Planparallele der irdischen Äquatorebene umgeben zu sein.

Wie eine Seilbahn fährt also die Erde entgegen dem Uhrzeigersinn um die Sonne. Für die Postion im Dezember ist in der Zeichnung ein Satellitenbild eingefügt. Dies verdeutlicht, dass in dieser Jahreszeit die Pinguine den hellen Polartag der Antarktis genießen, während die Eisbären der Arktis die finstere Polarnacht zu tiefem Winterschlaf nutzen. Der Deklinationswinkel δ befindet sich im Maximum und hat den Wert des Winkels ε. Im Juni sonnen sich die Eisbären. Auch hier gilt $\delta = \varepsilon$, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

Im Frühlings- und Herbstpunkt verhält sich die Erde so, als gäbe es keine Schiefe der Ekliptik. Der Erdäquator befindet sich der auf der Höhe der Sonne, der Deklinationswinkel δ ist gleich null.

Die Zeichnung deutet an, dass die Scheitelpunkte der Bahnellipse wie ein Scheibenwischer etwas zur Seite geneigt sind (P ≈12.5°). Dadurch liegen die Sommer-Sonnenwende (Solstitium) und der Apheldurchgang sowie die Winter-Sonnenwende und der Periheldurchgang jeweils um etwa 12¾ Tage auseinander.

Ein weiteres Merkmal ist die unterschiedliche Größe der Ellipsen-„Hälften“: Auf der nördlichen Halbkugel ist das Winterhalbjahr, d.h. der Lauf von der September-Tagundnachtgleiche (Aequinoctium) zum März-Aequinoctium, um 7.6 Tage kürzer als das Sommerhalbjahr. Das hat seine Ursache in der höheren Geschwindigkeit der Erde in Perihelnähe und ist somit eine Wirkung der Exzentrizität der Erdbahn.

Erste Ursache der Zeitgleichung: die Ellipsenform der Erdbahn

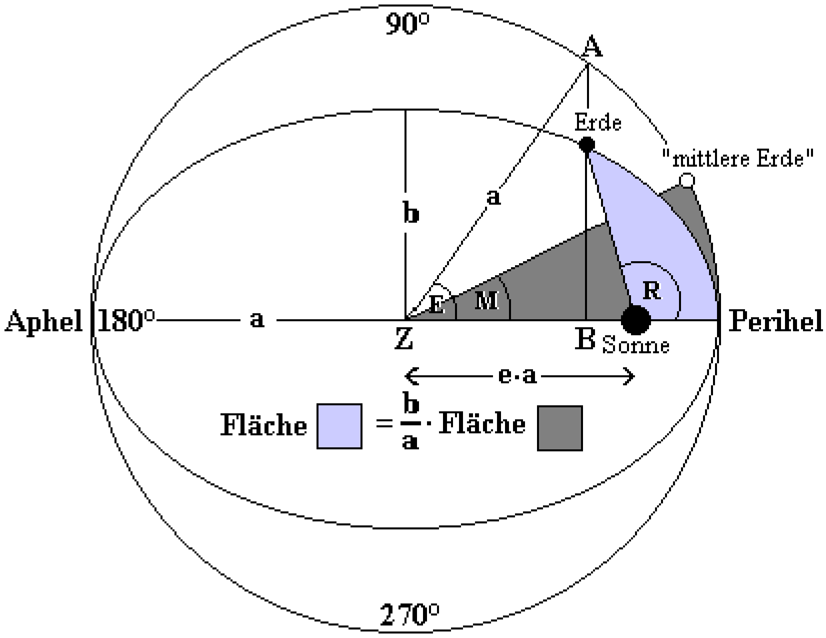
Es war wohl eine der großartigsten Leistungen Johannes Keplers, eine „mittlere“ Erde zu erdenken, die sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf einer perfekten Kreisbahn in Höhe der Äquatorebene bewegt. Die „Ungesetzlichkeit“ oder Anomalie der realen Erde gilt dann als Abweichung von den Werten dieses Phantasiegebildes. Um die Zusammenhänge zu verstehen, müssen wir uns mit Hilfe der Abb.3 in die so genannte Keplersche Formel eindenken. Sie lautet:

(1)
$$E = M + e \cdot sin(E)$$
oder
$$M = E - e \cdot sin(E)$$

Zunächst betrachten wir die Bewegung der Erde auf ihrer Bahnellipse, ohne ihre Neigung zur Äquatorebene zu berücksichtigen. Alle Winkel, die in dieser Abbildung bezeichnet sind, haben als Ausgangspunkt den Periheldurchgang der Erde. *R* ist der Winkel Erde-Sonne-Perihel, den die wirkliche Erde auf ihrer Ellipsenbahn nach *t* Tagen gebildet hat.Der Winkel *M* sollte eigentlich nicht „mittlere Anomalie“ sondern „Normalwinkel“ heißen. Er beschreibt, von einem gedachten Zentrum *Z* aus gesehen, den Winkel, den die mittlere Erde auf ihrer Kreisbahn im Abstand der Großen Halbachse *a* in der Zeit vom Periheldurchgang t_0 bis zum Zeitpunkt *t* zurückgelegt hat.

(2) $$M = \frac{2\pi}{T} \cdot (t - t_0); \quad T = 365.26 \text{ Tage}; \quad t = \text{Tage seit Periheldurchgang in } t_0 .$$

Abbildung 3
Erläuterung der Keplerschen Formel



Den Winkel E als $\angle AZB$ erhalten wir, wenn wir von der Position der wahren Erde das Lot auf die Halbachse a fällen, dort auf B treffen und mit der Verlängerung dieses Lotes im Punkt A den Umkreis treffen. E tritt in der Keplerschen Gleichung mal als Winkel, mal als Argument einer Sinusfunktion auf. Dies verhindert eine geschlossene Lösung der Gleichung, für die es nur eine Approximation per Reihenentwicklung oder Iteration gibt. Die entscheidende Variable ist e, die numerische Exzentrizität der Bahnellipse.

Für die Zeitgleichung gilt der Winkelunterschied $M - R$: Ausgehend vom Perihel bei 0 ° rennt R wegen der höheren Geschwindigkeit M voraus, um bei 90 ° den größten negativen Abstand zu erreichen. Von hier aus holt das gleichmäßig laufende M wegen der zunehmenden Bremsung von R auf, um im Aphel bei 180 ° in die gleiche Richtung wie R zu weisen. Von hier ab hat M den schnelleren Zuwachs und erreicht den maximalen positiven Abstand bei 270 °. Dann wiederum wirkt sich die Beschleunigung von R aus und beide Winkel treffen sich im Perihel. Der Verlauf dieser Richtungsabweichungen erinnert an eine Sinusfunktion mit negativem Vorzeichen: Bauch nach unten im Winter und Frühling, Nullstelle im Aphel und Bauch nach oben im Sommer und Herbst, wie in der Abb.6 dargestellt. Bleibt die Frage, wie hoch die Amplitude ist.

Es ist das Verdienst des großen Mathematikers Lagrange, die schwer verdauliche Keplersche Formel als Reihenentwicklung geknackt zu haben[4]. Seine Approximation des „realen“ Winkels R ist

(3) $$R \approx M + 2e \cdot sin(M) + \frac{5}{4}e^2 \cdot sin(2M) + \frac{1}{12}e^3 \cdot \left(13\,sin(3M) - \frac{1}{4}sin(M)\right) + e^4 \ldots$$

Hier sehen wir, dass mit $2e$ die doppelte Abweichung der Maximalgeschwindigkeit des Planeten Erde – nach oben plus nach unten – als Amplitude von $sin(M)$ in die Rechnung eingeht. Mit $e = 0.0167$ erhalten wir bis zur 2. Ordnung

(3a) $R \approx M + 0.0334 \cdot \sin(M) + 0.0003 \cdot \sin(2M) + \ldots[rad]$.

Wenn wir nun die Summanden mit *180/π* multiplizieren, erhalten wir Winkelgrade,

(3b) $R \approx M + 1.915° \cdot \sin(M) + 0.020° \cdot \sin(2M) + \ldots$

um nach Teilung durch die Rotationsgeschwindigkeit *0.25067°/min* oder *0.00418°/s*

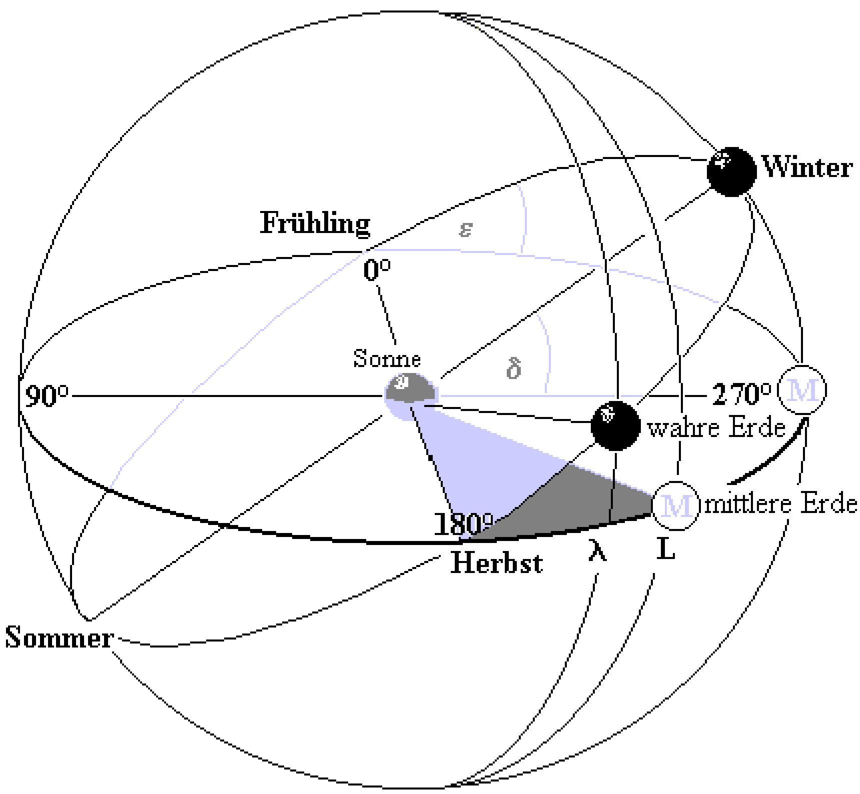
(3c)
$$M - R \approx -7.639 \cdot \sin(M) - 0.068 \cdot \sin(2M) + \ldots[min]$$
$$M - R \approx -458 \cdot \sin(M) - 4 \cdot \sin(2M) + \ldots[s]$$

den zeitlichen Unterschied zwischen *M* und *R* in Minuten oder Sekunden zu erhalten. Vielen wird es so gehen wie mir: Aha, das ist also die Bedeutung der mysteriösen Koeffizienten, die sonst nur als nackte Zahlen in Nautikbüchern[5] und BASIC Programmen[6] auftauchen!

Schiefe der Ekliptik als zweite Ursache der Zeitgleichung

Um den Effekt der Schiefe der Ekliptik einer Ellipsenbahn zu messen, benötigen wir zwei Schritte: Zunächst verlegen wir den Ausgangspunkt vom Perihel zum Frühlingspunkt.

Abbildung 4
Wirkung der Schiefe der Erdbahn



Dies hat zur Folge, dass wir nun mit der tropischen Winkelgeschwindigkeit zu rechnen haben. Eine auf einer Kreisbahn der Äquatorebene wandernde „mittlere Länge“ *L* hat nun die Formel

(4) $$L = \frac{360}{365.2422} \cdot t$$; mit t = Anzahl der Tage nach Frühlingsanfang.

Analog zur wahren Erde R ist die wahre Länge l

(5) $$l = L + 7.639\, sin(M) + 0.068\, sin(2M)$$

Der zweite Schritt besteht darin, die elliptische Erdbahn um den Winkel ε schrägzustellen. Jetzt wirft die Erde die senkrechte Projektion ihrer Position - gleichsam als Schatten - auf die Äquatorebene. Der Schittpunkt von Lot und Äquatorebene zeigt die „ekliptische Länge“ λ an (Abb.4). Entscheidend ist die Winkeldifferenz $L - \lambda$. Die Zeichnung veranschaulicht, wie, ausgehend vom gemeinsamen Herbstpunkt bei 180°, L dem λ mit einer maximalen Differenz bei 225° davonläuft, um erst bei 270° von λ wieder eingeholt zu werden. Umgekehrt läuft der Wettlauf vom Winter zum Frühling: hier hat λ die Nase vorn, wird aber im Frühlingspunkt von L eingeholt. Das gleiche Spiel wiederholt sich bei dem Lauf vom Frühling zum Sommer und vom Sommer zum Herbst, so dass wir es hier mit einer Sinusfunktion mit doppelter Frequenz zu tun haben.

Für die Zeitgleichung ist es wichtig, die Amplitude dieser Sinusfunktion in Abhängigkeit von der Schiefe der Ekliptik ε zu kennen. Auch für die Differenz $L - \lambda$ gibt es eine schnell konvergierende Reihenentwicklung[7].

(6) $$L - \lambda = tan^2(\varepsilon/2) \cdot sin(2l) - \frac{1}{2} \cdot tan^4(\varepsilon/2) \cdot sin(4l) + \frac{1}{3} \cdot tan^6(\varepsilon/2) \cdot sin(6l) - \ldots$$

Selbst wenn wir berücksichtigen, dass ε keine Konstante ist sondern nach der Formel

(7) $$\varepsilon = 23.4393° - 0.013° \cdot t$$

abnimmt, wobei t die Anzahl der Tage nach dem 1. Januar 2000 geteilt durch 36525 ist, so können wir dennoch getrost im Jahr 2002 mit dem Wert $\varepsilon = 23.4393°$ rechnen.

mit $\left(tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 0.0430$ und $\frac{1}{2} \cdot \left(tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 = 0.0009$
erhalten wir

(6a) $$L - \lambda = 9.835 \cdot sin(2l) - 0.212 \cdot sin(4l) + \ldots [min].$$

Damit zeigt sich, dass sich die Schiefe der Ekliptik stärker auf die Zeitanzeige einer Sonnenuhr auswirkt als die Exzentrizität der Bahnellipse.

Nullstellen

Wenn wir wollen, dass unsere Zeitgleichung am 1. Januar beginnt, müssen wir wissen, mit wie viel Grad der Elliptik- und Ekliptikeffekt um 24 Uhr des 31. Dezembers des Vorjahres ankommt, um zu einem genau definierten Zeitpunkt im Periheldurchgang einerseits und im Frühlingspunkt andererseits 360° zu erreichen und somit auf Null zurückzufallen.

Die Homepage des U.S. Naval Observatory[8] leistet den Service, die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkte sowie die Perihel- und Apheldurchgänge zu prognostizieren. Für das Jahr 2002 ist der Periheldurchgang für den 2. Januar 14 Uhr und der Frühlingspunkt für den 20. März um 19 Uhr 16 Min. Universal Time (UT) vorausgesagt. Damit erhalten wir

(8a) $$x_{EZ} = 360° - \frac{360°}{365.26} \cdot 1.583 = 358.439°$$ für den Effekt der Exzentrizität und

(8b) $$x_{EZ} = 360° - \frac{360°}{365.24} \cdot 78.803 = 282.328°$$ für den Effekt der Schiefe der Ekliptik.

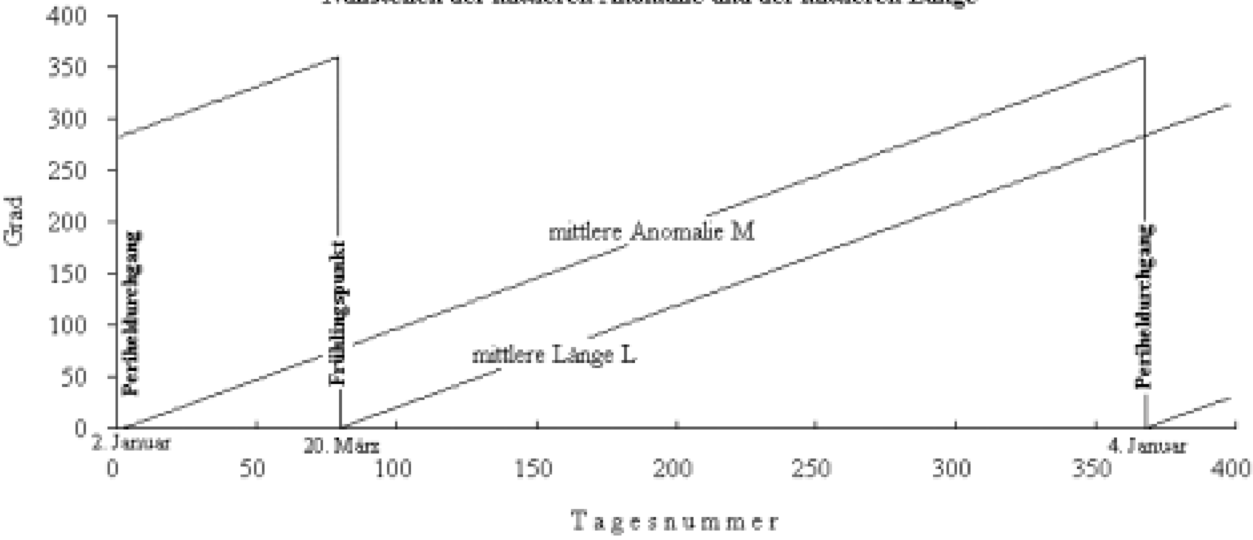
Die praktischen Formeln für die mittlere Anomalie *M* und die mittlere Länge *L* lauten nun

(9a) $$M = mod\left(358.439° + \frac{360°}{365.26} \cdot t,\ 360\right)$$

(9b) $$L = mod\left(282.328° + \frac{360°}{365.24} \cdot t,\ 360\right),$$

wobei t die laufende Tagesnummer des Jahres angibt und *mod* oder *Rest* als Operator dafür sorgt, dass die steigende Linie bei Erreichen von 360° wieder bei 0° anfängt: typische Sägezahnschwingungen mit der Periode $2\pi = 360°$, wie in der Abb.5 dargestellt. Diese laden förmlich zur Entwicklung einer Fourier-Serie[9] ein!

Abbildung 5
Nullstellen der mittleren Anomalie und der mittleren Länge



Dass sich die Zeitpunkte für die Nullstellen keineswegs genau wiederholen sondern eine erhebliche Variation aufweisen, zeigt die Tab.1.

Tabelle 1
Statistische Auswertung der Daten des US Naval Observatory der Jahre 1992-2005 für die Periheldurchgänge und Anfänge der Jahreszeiten in Tagen

Merkmal	Mittelwert±Standard-abweichung	Datum	Jahr: Abstand gleicher Punkte
Periheldurchgang	2.5929 ± 1.0157	3.Januar	365.2740 ± 1.6674
Frühlingspunkt	79.9481 ± 0.2977	19.März	365.2428 ± 0.0032
Sommeranfang	172.7081 ± 0.2982	20.Juni	
Herbstpunkt	266.3565 ± 0.2996	22.September	
Winteranfang	356.1257 ± 0.4196	21.Dezember	
Sommerhalbjahr	186.4084 ± 0.0056		
Winterhalbjahr	178.8345 ± 0.0041		
Perihel.-Winteranf.	12.7479 ± 1.0063		

Es wird deutlich, dass die vom U.S. Naval Observatory publizierten Werte, wahrscheinlich unter Berücksichtigung der Störungen naher Planeten, der Präzession und Nutation, ja sogar relativistischer Terme, jeweils neu berechnet werden und keine Fortschreibung einmal gefundener Fixpunkte sind.

Super präzise Zeitangaben in Lexika sind demnach nur bedingt vertrauenswürdig. Andererseits ist der ausgewertete Beobachtungszeitraum zu kurz, um verbindliche Korrekturen bei etablierten Zeitspannen, wie dem siderischen und tropischen Jahr, vorzunehmen.

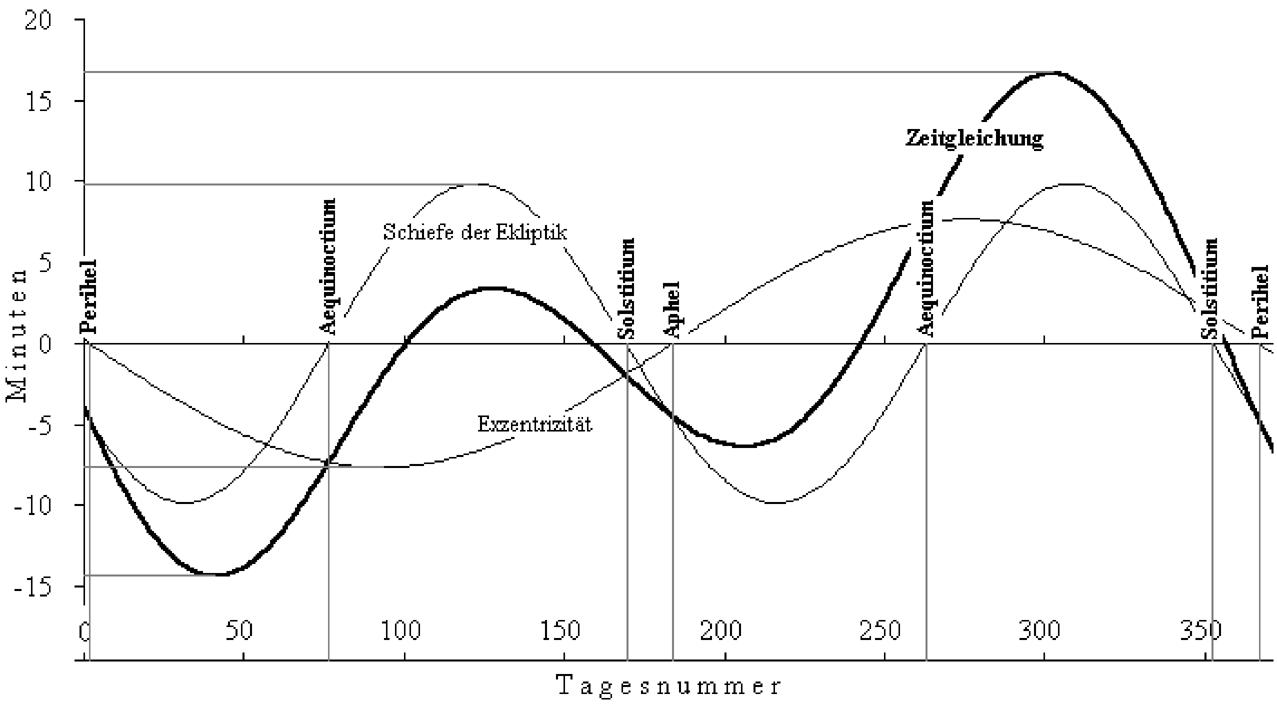
Das Computer-Analemma

Wir sind am Ziel. Unter Berücksichtigung der bisher erarbeiteten Merkmale lautet die Zeitgleichung[10] in Minuten:

(10) $Z = -7.639 \sin M - 0.068 \sin 2M + 9.835 \sin 2l - 0.212 \sin 4l$;

als Summe der Effekte der Elliptik und der Schiefe der Ekliptik (Abb.6).

Abbildung 6
Die Zeitgleichung als Summe der Effekte der Exzentrizität und der Schiefe der Ekliptik

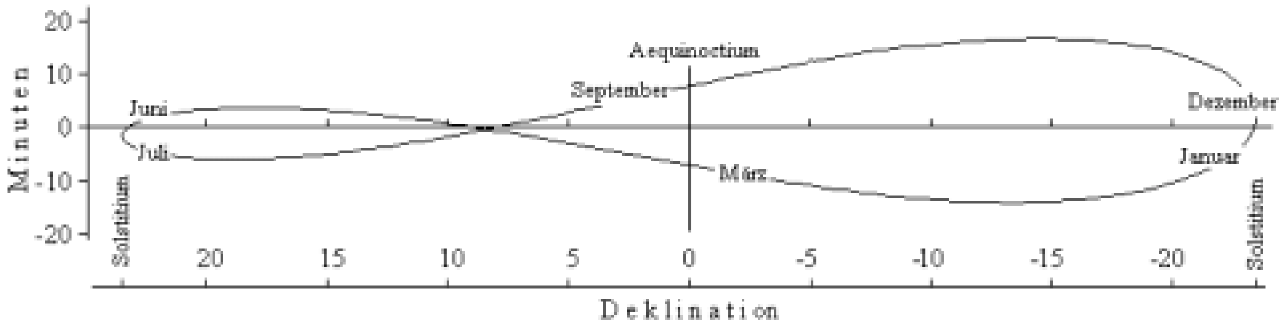


Wenn wir nun noch die Tagesnummer als Abszisse gegen die Deklination δ mit negativem Vorzeichen nach der Formel

(11) $\delta = -\arcsin(\sin\varepsilon \cdot \sin l)$

vertauschen, so kommen wir, wie in der Abb.7 zu sehen, exakt auf die Form des Analemmas am Himmel.

Abbildung 7
Das Analemma auf dem Bildschirm



Die kummulativen Abweichungen der Zeitgleichung haben sich in die Bäuche des Analemmas verwandelt. Nun wissen wir, an welchen Tagen wir uns verläßlich nach der Zeitanzeige der Sonnenuhr verabreden können, denn dann kreuzt das Analemma die Deklinationslinie: am 13. April, am 10. Juni, am 30. August und am 23. Dezember, sofern die Sonne scheint und unsere Rechnung stimmt.

Warum steht aber das „wahre“ Analemma so schräg am Himmel? Die Beantwortung dieser Frage möchte ich dem Leser überlassen.

---

[1] αναλαμβανω heißt laut Langenscheidts Lexikon für Altgriechisch „ich mache wieder gut, ich gleiche aus“. Das zugehörige Substantiv, αναλημμα, bedeutet demnach „Ausgleich“, also „Zeitgleichung“.

[2] Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau Bodensee eMail Strutz_Christian@t-online.de

[3] In Kenntnis der Tatsache, dass die Universal Time (UT) immer wieder wegen Unregelmäßigkeiten der Rotationsgeschwindigkeit der Erde korrigiert werden muss (UTC), wird auf eine auf 1/1000 Sekunden genaue Angabe verzichtet.

[4] Schaub, Werner 1950: Vorlesungen über sphärische Astronomie. Akad. Verlagsges. Geest&Portig, Leipzig. Seite 38; zitiert in: Müller, Markus 1995: Equation of Time – Problem in Astronomy. Acta Phys. Pol. **88** Suppl. Seite 49; http:/info.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsII/mul/mueller.html

[5] Albrand, Karl-Richard und Hermann Junge 1997: Formelsammlung Navigation. DSV-Verlag, Hamburg. Seie 28

[6] Stein, Walter und Werner Kumm 1997: Astronomische Navigation. Klasing&Co, Bielefeld. Seite 175

[7] Schaub, Werner 1950: Vorlesungen über sphärische Astronomie. Akad. Verlagsges. Geest&Portig, Leipzig. Seite 30

[8]U.S. Naval Observatory, Astronomical Applications Department 2001: Earth’s seasons; Equinoxes, Solstices, Perihelion, and Aphelion 1992-2005. http://aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.html

[9] Spencer, J.W. 1971: Fourier series presentation of the position of the sun. Search 2 (5), 172.

[10] Yallop, B.D. and C.Y. Hohenkerk 1992: Astronomical Phenomena. In: Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, P. Kenneth-Seidelmann Ed., Univ. Sci. Books, Mill Valley, CA.