U LTIMA RATIO:
Ein Versuch, NEWTONs Propositio 11 zu verstehen

von

Christian Strutz*

Wenn **A** zu **B** gleich **C** ist und **B** zu **D** gleich **E**: Was ist dann **A** zu **D**? Kaum jemand von uns wäre, so wie NEWTON, in der Lage, spontan zu antworten: **A** zu **D** ist **C** mal **E**! Denn das Denken in der strikten Logik der Proportionen, wie dies offenbar die Pythagoräer taten, ist uns weitgehend abhanden gekommen. Daß man solche Verhältnis-Ketten endlos weiterführen kann, zeigt das folgende Beispiel:

$$\frac{a}{b} = c\ ; \qquad a = c \cdot b$$
$$\frac{b}{d} = e\ ; \qquad d = \frac{b}{e}\ ; \qquad \frac{a}{d} = \frac{c \cdot b \cdot e}{b} = c \cdot e$$
$$\frac{d}{f} = g\ ; \qquad f = \frac{d}{g}\ ; \qquad \frac{a}{f} = \frac{c \cdot e \cdot d \cdot g}{d} = c \cdot e \cdot g$$
$$\frac{f}{h} = i\ ; \qquad h = \frac{f}{i}\ ; \qquad \frac{a}{h} = \frac{c \cdot e \cdot f \cdot g \cdot i}{f} = c \cdot e \cdot g \cdot i$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

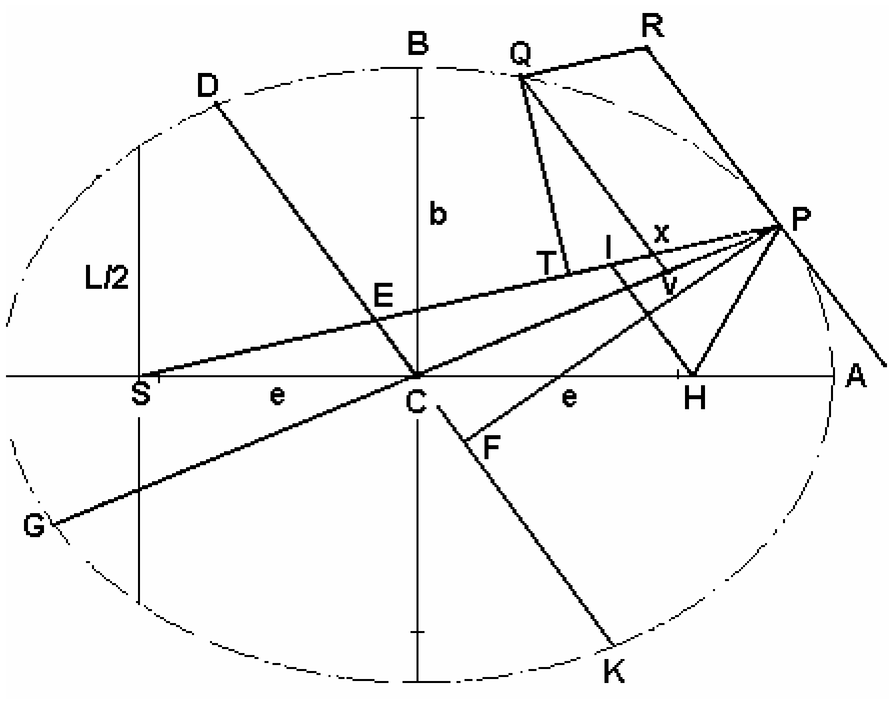
Damit wird klar: mit *ultima ratio* ist hier nicht der bildungssprachliche Begriff des „letztmöglichen Weges“ sondern der Quotient zwischen dem ersten Zähler und dem letzten Nenner einer Reihe von Brüchen gemeint, bei welcher der nächstfolgende Bruch immer den Nenner seines Vorgängers als Zähler übernimmt.

Nach dieser Einstimmung können wir uns der *Propositio 11* zuwenden: Sie gilt als Kernstück Isaac NEWTONs „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ aus den Jahren 1686, .. und 1726 als dritter Auflage. Als *Problema 3* war die *Propositio 11* schon 1684 in der kurzen Abhandlung „De Motu Corporum in Gyrum“ veröffentlicht und ist als handschriftliches Dokument** erhalten. Den Text und dessen Auslegung entnehme ich der Neuen Übersetzung von I.B. COHEN und A. WHITMAN (1999) sowie der Einführung in NEWTONs Principia von I.B. COHEN (1999):

„Ein Planet bewege sich auf einer Ellipsenbahn von *P* nach *Q*. Gesucht wird ein Gesetz, welches die auf das Zentrum im Brennpunkt der Ellipse gerichtete Kraft beschreibt...“. Zur Erläuterung seiner weiteren Ausführungen zeigt NEWTON eine Skizze, deren Beschreibung wir nachvollziehen können.

---

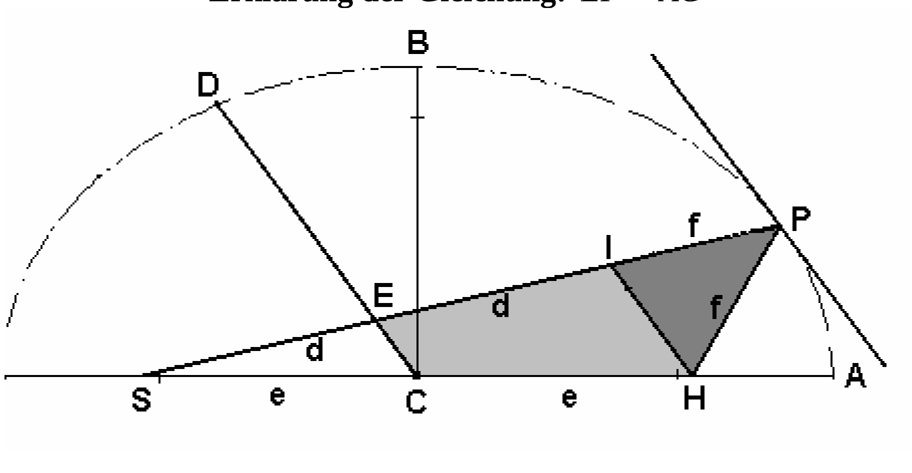
* Dr Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau, eMail Strutz_Christian@t-online.de
http://www.CapeCanaveral/4310/strutz/strutz.htm
** s. Anhang



Von *P* ausgehend zeichnen wir über *C* nach *G* den Durchmesser der Ellipse. Der dazu gehörende konjugierte Durchmesser *DK* verläuft definitionsgemäß parallel zur Tangente im Punkt *P*. Die Normale zu dieser Tangente trifft auf *DK* im rechten Winkel im Punkt *F*. Eine weitere Parallele zur Tangente geht von *Q* aus und schneidet die Strecke *SP* in *x* und den Durchmesser *PG* in *v*. Eine Parallele zu *SP* durch *Q* schneidet die Tangente in *R*, so daß das Parallelogramm *QxPR* entsteht. Die Parallele zur Tangente durch den Punkt *H*, dem zweiten Brennpunkt der Ellipse, schneidet den Brennstrahl *SP* in *I*. Außerdem gelte für den Parameter $L = 2p$ der Ellipse: $L = \frac{2CB^2}{AC}$.

Es folgt NEWTONs Behauptung, die Strecke *EP* sei konstant gleich der Großen Halbachse *AC* . Zur Überprüfung dieser Behauptung dient die nächste Abbildung.

Erklärung der Gleichung: $EP = AC$



Voraussetzung ist die Grundgleichung der Ellipsen, die besagt, daß die Summe der Brennstrahlen *SP* und *PH* das Doppelte der Großen Halbachse $AC = a$ ergibt.

$$SP + PH = 2AC = 2a$$

Wir stellen fest: Die beiden Dreiecke *SHI* und *SCE* sind wegen der Paralellität von *HI* und *CE* einander ähnlich. Wenn nun die Abstände der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt *C* der Ellipse gleich sind $SC = CH = e$, so müssen auch die Strecken *SE* und *EI* gleich sein $SE = EI = d$. Da aber zur Komplettierung von *SP* nur noch ein Stück mit der Länge *PH* fehlt, so folgt, daß *PH* und *PI* gleich sein müssen: $IP = PH = f$.

$$\begin{aligned} 2d + f &= SP \\ f &= PH \\ 2d + 2f &= SP + PH = 2AC \\ d + f &= EP \\ EP &= AC \end{aligned}$$

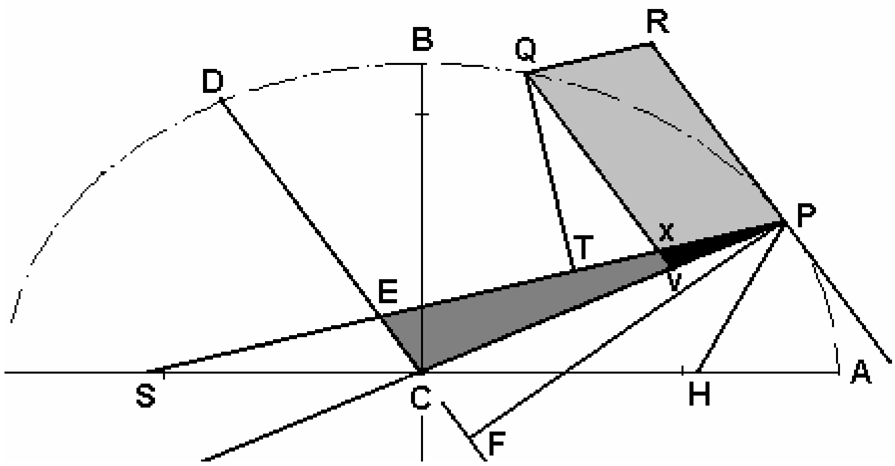
Damit ist schon der verblüffend einfache Beweis für die Ellipsenform der Planetenbahn gegeben, vorausgesetzt, es läßt sich ein meßbarer Unterschied zwischen Aphel und Perihel feststellen.

Aber NEWTONs Beweisführung geht viel weiter: Er wird anhand des Parameters *L* zeigen, daß sich alle Himmelskörper , deren Bahnen von einer Zentralkaft abgelenkt werden, auf Kegelschnitten, also auf Ellipsen, Kreisen, Parabeln und Hyperbeln, bewegen, wobei diese Kraft mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung von der Zentralmasse abnimmt.

Zunächst formuliert NEWTON die erste für die *ultima ratio* notwendige Gleichung:

(1) $$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{QR}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC} \ .$$

Erklärung der Gleichung (1): $\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{AC}{PC}$



Voraussetzung für die erste Bestimmungsgleichung (1) ist die Ähnlichkeit zwischen den Dreiecken *Pxv* und *PEC*, welche dadurch gegeben ist, daß *Pxv* ein Teil von *PEC* ist und daß *xv* parallel zu *EC* verläuft. Außerdem macht NEWTON davon Gebrauch, daß *EP* gleich *AC* ist und *QR* aufgrund des Parallelogramms *QxPR* gleich *Px* ist.

Die Gleichung (2) erscheint etwas trivial,

(2) $$\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv} \;;$$

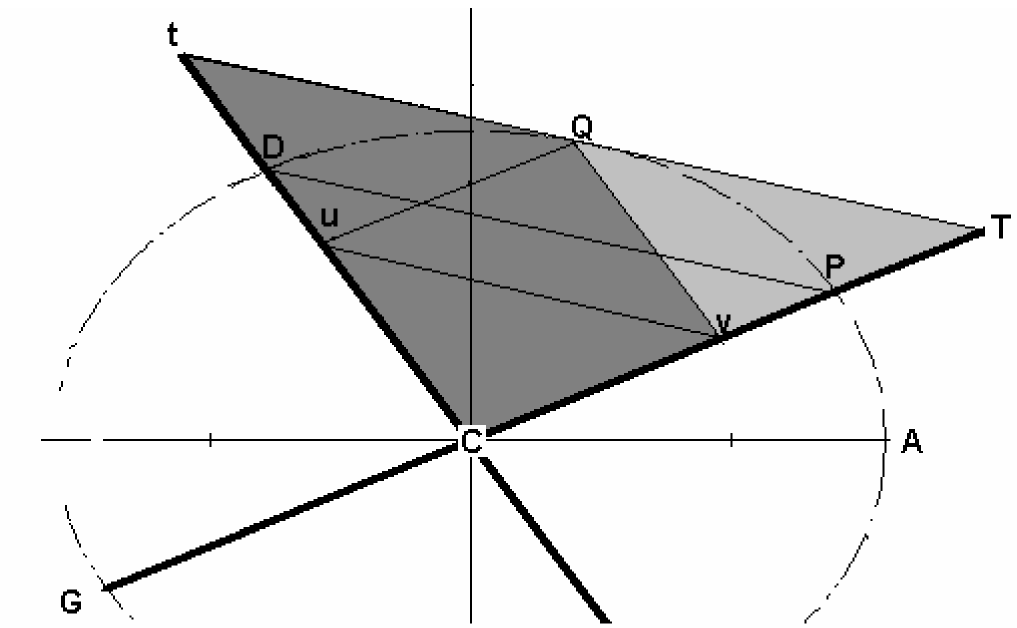
denn bei *Pv* im Zähler und Nenner bleibt uns nichts anderes als diese Größe zu kürzen. In der nächsten Gleichung (3) brauchen wir aber das Produkt der Teilstücke *Gv* und *Pv* des Durchmessers *PG* und in der *ultima ratio* den Quotienten L/Gv, um den Faktor *2* zu erhalten und CB^2 wegkürzen zu können.

Ein „Brummer“ ganz anderen Formats ist die Gleichung (3), die wohl aus der Lehre über die Kegelschnitte des Apollonius von Pergae stammt: Das Produkt aus *Gv* und *vP* zum Quadrat der Ordinate *Qv* sei gleich dem Quotienten aus dem Quadrat des halben Durchmessers *PC* und dem Quadrat des halben konjugierten Durchmessers *CD*.

(3) $$\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \;.$$

Zur Herleitung dieses kompliziert anmutenden Zusammenhangs zeichnen wir eine Tangente durch *Q* und verlängern *CD*, um den Schnittpunkt *t* bzw. *CP*, um den Schnittpunkt *T* zu erhalten. Von *Q* aus zeichnen wir die Parallele zu *CP*, die *CD* in *u* und die Parallele zu *CD*, die *CP* in *v* schneidet.

Erklärung der Gleichung (3): $\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$



Es bildet sich das Parallelogramm *CvQu* mit der Konsequenz, daß *Cu* gleich *Qv* und *Cv* gleich *Qu* ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *Cuv* und *CDP* folgt:

(3.1) $\dfrac{Cv}{CP} = \dfrac{CP}{CT}\ ;\ CP^2 = Cv \cdot CT$

(3.2) $\dfrac{Cu}{CD} = \dfrac{CD}{Ct}\ ;\ CD^2 = Cu \cdot Ct = Qv \cdot Ct$, so daß der Quotient

(3.3) $\dfrac{CP^2}{CD^2} = \dfrac{Cv \cdot CT}{Qv \cdot Ct}$ ergibt.

Außerdem sind auch die Dreiecke CtT und vQT einander ähnlich, so daß

(3.4) $\dfrac{CT}{Ct} = \dfrac{vT}{Qv}$ und somit

(3.5) $\dfrac{CP^2}{CD^2} = \dfrac{Cv \cdot vT}{Qv \cdot Qv} = \dfrac{Cv \cdot vT}{Qv^2}$.

Aus der Zeichnung entnehmen wir, daß

(3.6) $\begin{aligned} Cv + vT &= CT \\ vT &= CT - Cv\,. \end{aligned}$ und

Umgeformt ergibt der Zähler von (3.5) unter Verwendung von $CP^2 = Cv \cdot CT$

(3.7) $Cv \cdot vT = Cv \cdot \left(CT - Cv\right) = Cv \cdot CT - Cv^2$

(3.8) $Cv \cdot vT = CP^2 - Cv^2 = \left(CP + Cv\right) \cdot \left(Cp - Cv\right)$.

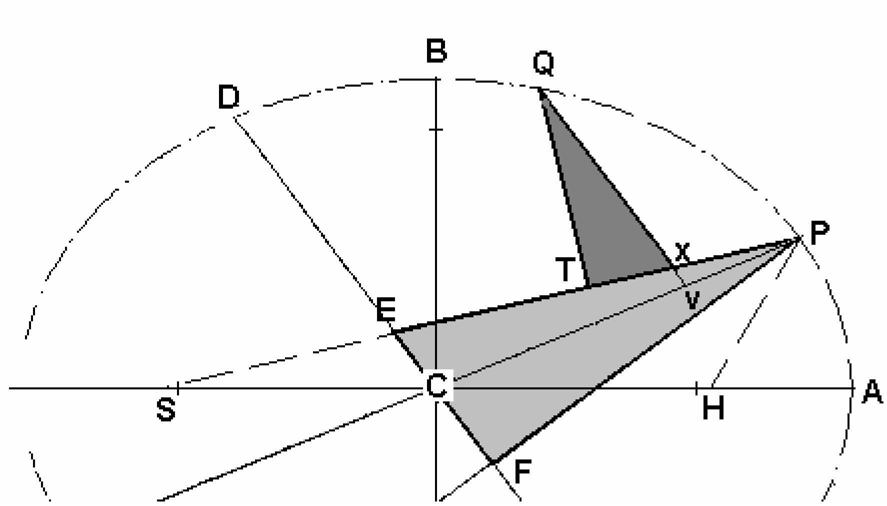
Weil der Mittelpunkt C den Durchmesser PG in zwei gleiche Hälften teilt, ist CP gleich CG. Daraus folgt, daß $CP + Cv = Gv$ und $CP - Cv = Pv$, so daß $CP^2 - Cv^2 = Gv \cdot Pv$. So bekommt schließlich die Gleichung (3.5) die Form

(3) $\dfrac{CP^2}{CD^2} = \dfrac{Gv \cdot Pv}{Qv^2}$.

Nun kommt ein bedeutsamer Schritt: Statt mit Qv^2 weiterzurechnen, nimmt NEWTON Qx^2, von dem er behauptet, daß es im Moment des Auftreffens von Q auf P gleich Qv^2 sei.

Es folgt die Gleichung (4) in zwei Etappen, zunächst aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke *PEF* und *QxT*.

Erklärung der Gleichung (4a): $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{EP^2}{PF^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$



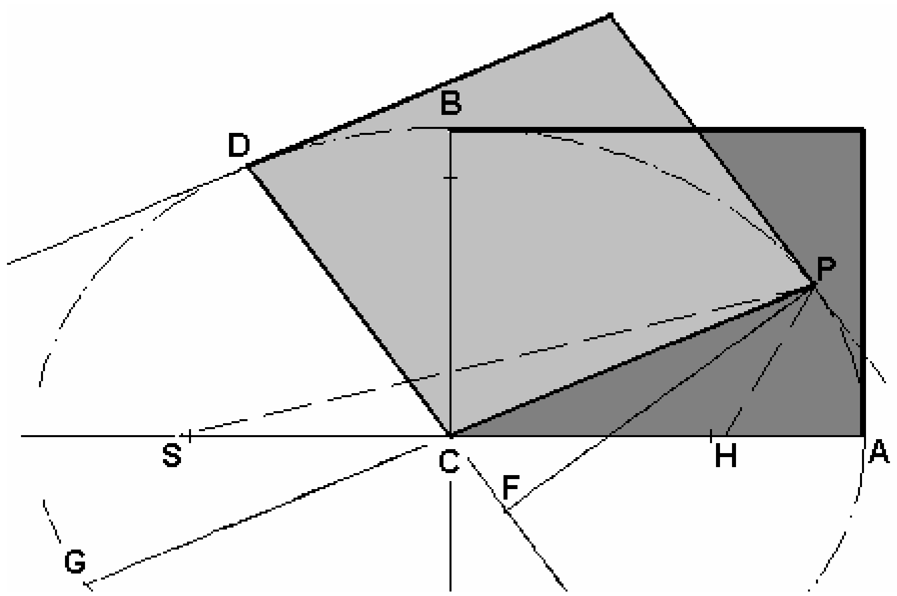
Diese Ähnlichkeit ist gegeben durch die rechten Winkel bei *F* und *T* und die Tatsache, daß die beiden Winkel *FEP* und *QxT* gleich sind, weil sowohl *EF* und *Qx* als auch *EP* und *Tx* als Teilstrecke von *EP* zueinander parallel stehen.

(4.1) $\frac{Qx}{QT} = \frac{EP}{PF} = \frac{AC}{PF}$ wegen $EP = AC$; quadriert ergibt das

(4.2) $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$.

In der zweiten Etappe der Erklärung der Gleichung (4) handelt es sich um die Anwendung der Regel, daß alle Berührungsparallelogramme einer Ellipse die gleiche Fläche haben.

Erklärung der Gleichung (4b): $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}$



Voraussetzungen sind, daß $DK = 2CD$ und daß $PF \perp DK$, so daß daraus die ganze Sequenz der Gleichung (4.3) folgen kann:

$$DK \cdot PF = 2CA \cdot CB$$
$$2CD \cdot PF = 2CA \cdot CB$$
$$\frac{CA}{PF} = \frac{CD}{CB} \qquad (4.3)$$
$$\frac{CA^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}$$

Insgesamt haben wir es also mit vier Gleichungen in Form von Verhältnissen zu tun, wobei, wie im anfänglichen Beispiel, der nächstfolgende Bruch immer den Nenner seines Vorgängers als Zähler übernimmt.

(1) $\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{AC}{PC}$;

(2) $\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv}$; $\qquad \frac{L \cdot QR}{Gv \cdot Pv} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{L}{Gv}$;

(3) $\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$; $\qquad \frac{L \cdot QR}{Qv^2} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{L}{Gv} \cdot \frac{PC^2}{CD^2}$;

$$\lim_{Q \to P} Qv^2 = Qx^2$$

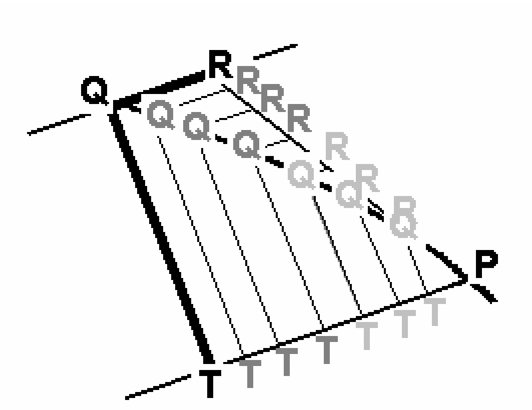
(4) $\qquad \dfrac{Qx^2}{QT^2} = \dfrac{CD^2}{CB^2} \qquad\qquad \dfrac{L \cdot QR}{QT^2} = \dfrac{AC}{PC} \cdot \dfrac{L}{Gv} \cdot \dfrac{PC^2}{CD^2} \cdot \dfrac{CD^2}{CB^2}; \quad AC \cdot L = 2CB^2$

Analog zum Beispiel in der Einleitung und der Methode NEWTONs folgend lautet die *ultima ratio*:

(5)
$$\frac{L \cdot QR}{QT^2} = \frac{2CB^2 \cdot PC^2 \cdot CD^2}{PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2};$$
$$\frac{L \cdot QR}{QT^2} = \frac{2PC}{Gv}\ .$$

Nun kommt das Entscheidende: Von den letzten beiden Quotienten behauptet NEWTON, daß sie gleich 1 seien, daß also $L \cdot OR = QT^2$ und $2PC = Gv$, wenn die Distanz zwischen P und Q unendlich klein geworden sei. Um dies zu überprüfen, machen wir ein Experiment:

Wir lassen den Abstand zwischen Q und P nach NEWTONs Vorschrift tatsächlich immer kleiner werden und berechnen mittels Tabellenkalkuation die Werte von Qx^2/Qv^2, $L \cdot OR / QT^2$ und $2PC/Gv$, die jeweils den Wert von 1 erhalten müßten.



Mit der großen Halbachse $a = 8$, der kleinen Halbachse $b = 6$ und $L = 9.0$ bestätigt dies die folgende Tabelle.

Effekt der Näherung des Punktes Q an den Punkt P (7.0|2.9)

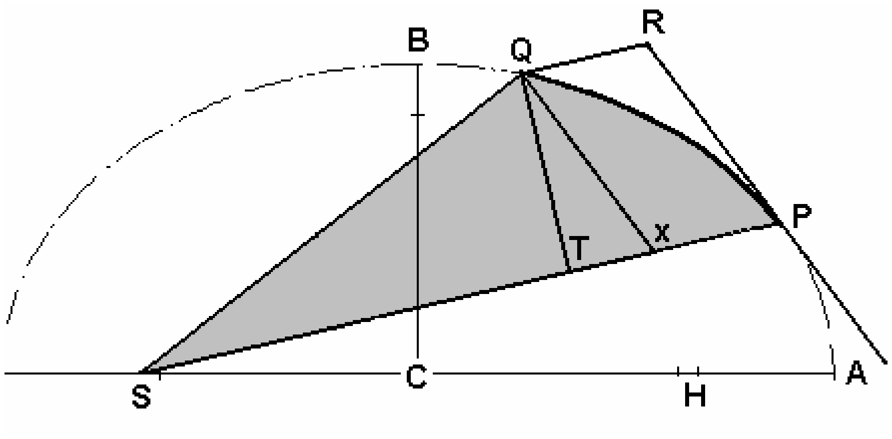
Q	Qx^2/Qv^2	$L*QR/QT^2$	2PC/Gv	QT^2/QR
2	0.833	1.423	1.185	6.326
3	0.861	1.307	1.126	6.888
4	0.891	1.210	1.077	7.441
5	0.921	1.128	1.039	7.981
6	0.956	1.058	1.012	8.505
6.5	0.976	1.028	1.003	8.757
6.9	0.995	1.005	1.000	8.953
6.99	0.999	1.001	1.000	8.995
6.999	1.000	1.000	1.000	9.000

Was ist geschehn? Ganz offensichtlich haben sich bei der Näherung von *Q* an *P* die Proportionen zwischen QT^2 und *QR* derart verändert, daß sie als Quotient $L \cdot QR / QT^2$ auf den Wert 1 zugestrebt sind. Bei $a = b = p$, also einer Kreisbahn, beträgt dieser Grenzwert ebenfalls 1.

So trägt der Quotient zwischen QT^2 und *QR* im Moment des Zusammentreffens der Punkte *P* und *Q* die Information über die Form *L* der Bahn, denn

(5a) $$\underset{\lim Q \to P}{L} = \frac{QT^2}{QR} \; .$$

Aber die Geschichte ist noch nicht am Ende, denn jetzt kommt der Bezug zum Entfernungsquadratgesetz. Dazu betrachten wir nochmals die Ellipse; diesmal den Sektor *SPQ*. Mit unserer schon geschärften Phantasie können wir sagen, daß es sich, wenn *P* und *Q* ganz nahe beieinander liegen, um ein Dreieck handelt, dessen Höhe *QT* beträgt, wobei die Krümmung zwischen *P* und *Q* gerade im Begriff ist zu entstehen.



Die Fläche dieses als ganz winzig gedachten Dreiecks beträgt also $½ \cdot SP \cdot QT$, deren Größe natürlich von der zu ihrer Bildung durch die Planetenbewegung benötigten Zeit Δt abhängt.

(6) $$\frac{1}{2} \cdot (SP \cdot QT) \propto \Delta t$$
$$(SP \cdot QT)^2 \propto \Delta t^2$$

Andererseits bedeutet die durch die Kraft *F* der Zentralmasse in *S* erzwungene Richtungsänderung, die in der Strecke *QR* ihren Ausdruck findet, eine Beschleunigung, die sich nach GALLILEI umgekehrt proportional zum Quadrat der dazu benötigten Zeit verhält.

(7) $$F \propto \frac{QR}{\Delta t^2}$$

(6) in (7) eingesetzt ergibt die Proportionalität $F \propto \frac{QR}{SP^2 \cdot QT^2}$; wobei wir aus (5a) wissen, daß der Kehrwert des Bahnparameters $\frac{1}{L} = \frac{QR}{QT^2}$ beträgt. Dies ergibt $F \propto 1/(SP^2 \cdot L)$. Als konstanter Bahnparameter nimmt aber *L* nicht an der Variation von *F* und SP^2 teil, darf also weggelassen werden, so daß

(8) $$F \propto \frac{1}{SP^2} \ .$$

Die letzte Formel (8) bringt schließlich zum Ausdruck, daß die Kraft, die einen Planeten von einer geradlinigen Inertialbahn ablenkt, sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Ursprung dieser Kraft verhält. Damit ist der Weg frei für NEWTONs Gravitationsgesetz, welches vor allem auch diesen Zusammenhang zum Inhalt hat.

Quellen:

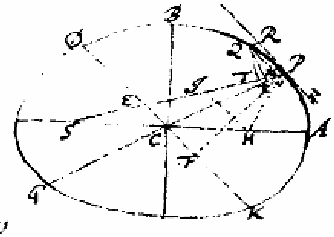
NEWTON, I. 1726: The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy. A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman; assisted by Julia Budenz. Preceded by A Guide to Newton's Principia. by I. Bernard Cohen. Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, London. (1999).

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr. Jürgen Ehlers vom Max Planck Institut für Gravitationsforschung (Albert Einstein Institut) in Potsdam für seinen freundlichen Hinweis auf diese Quellen und seine Anregung, NEWTONs Texte genau zu lesen.

Lindau, Januar 2000

Prob. 2. Gyrat corpus in ellipsi veteri: requiritur lex ~~gravitatis~~ vis centripetae tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB semi-axes Ellipseos, GP, DK diametri conjugatae, PF, Qt perpendicula ad diametros, Qv ordinatim applicata ad diametrum GP, et QvPR parallelogrammum. His constructis erit (ex Conicis) PvG ad Qv^2 ut PC^2 ad CD^2 et Qv^2 ad Qt^2 ut PC^2 ad PF^2 et conjunctis rationibus PvG ad Qt^2 ut PC^2 ad CD^2 et PC^2 ad PF^2, id est vG ad $\frac{Qt^2}{Pv}$ ut PC^2 ad $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Scribe QR pro Pv



et $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P et Q coeuntibus) 2PC pro vG et ductis extremis et mediis in se mutuo, fiet $\frac{Qt^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Est ergo vis centripeta reciproce ut $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$ id est (ob datum $2BC^2 \times CA^2$) ut $\frac{1}{PC}$, hoc est directe, ut distantia PC. Q.E.I. 2 Per ...

Prob. 3. Gyrat corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetae tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos superioris umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos diametrum DK in E. Patet EP aequalem esse semiaxi majori AC eo, quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob aequales CS, CH aequentur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI id est ipsarum PS, PH quae conjunctim axem totum 2AC adaequant. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC^2}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv id est ut PE (seu AC) ad PC, et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv et GvP ad Qv^2 ut CP^2 ad CD^2, et Qv^2 ad Qx^2 puta ut M ad N, et Qx^2 ad QT^2 ut EP^2 ad PF^2 id est ut CA^2 ad PF^2 sive[2] ut CD^2 ad CB^2, et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ ad QT^2 ut AC ad PC + L ad Gv + CP^2 ad CD^2 + M ad N + CD^2 ad CB^2, id est ut $AC \times L$ (seu $2BC^2$) ad $PC \times Gv$ + CP^2 ad CB^2 + M ad N, sive ut 2PC ad Gv + M ad N. Sed punctis Q et P coeuntibus rationes 2PC ad Gv et M ad N fiunt aequalitatis: Ergo et ex his composita ratio $L \times QR$ ad QT^2. Ducatur pars utraque in $\frac{SP^2}{QR}$ et fiet $L \times SP^2 = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Ergo vis centripeta reciproce est ut $L \times SP^2$ id est in ratione duplicata distantiae SP. Q.E.I. 2 Per Lem. 4

~~...~~

Schol. Gyrant ergo Planetae majores in ellipsibus habentibus umbilicum in centro Solis, et radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales, omnino ut supposuit Keplerus. Et harum Ellipseon latera recta sunt $\frac{QT^2}{QR}$, ~~...~~ punctis P et Q spatio quam minimo et quasi infinite parvo distantibus.