

Über das *latus rectum principalis* in Newtons Himmelsmechanik

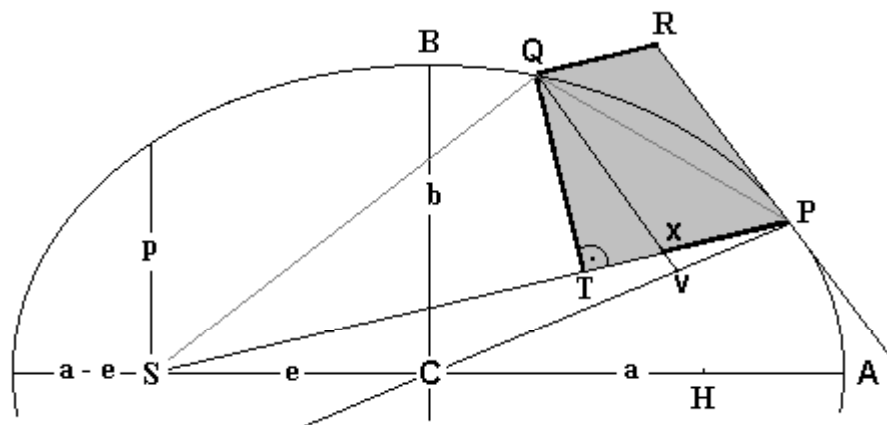
von
Christian Strutz*

Daß das *latus rectum principalis* aus der Kegelschnittlehre des APOLLONIUS von Pergae ein entscheidendes Argument für NEWTONs Himmelsmechanik darstellt, steht außer Zweifel. Es zeigt sich, daß dieser Parameter ein nach mehreren Methoden berechenbarer Grenzwert ist.

So schrieb Isaac NEWTON im November 1684 in seinem Traktat *De Motu Corporum in Gyrum*: „Deshalb kreisen die größeren Planeten auf Ellipsen, deren Brennpunkt sich im Zentrum der Sonne befindet: ganz so wie dies KEPLER vermutet hat. Und die *latera recta* dieser Ellipsen sind gleich QT^2/QR , wenn der Abstand zwischen den Punkten P und Q möglichst gering ist und sie gleichsam unendlich nahe beieinander liegen.“

Um zu sehen, um welche Punkte und Abstände es sich hierbei handelt, verwenden wir in abgewandelter Form NEWTONs eigene Zeichnung (Abb.1).

Abbildung 1
Bahnellipse nach Newtons Skizze



Die Abbildung 1 zeigt die obere Hälfte einer Ellipse mit den Brennpunkten S und H , der kleinen Halbachse b , der großen Halbachse a , der linearen Exzentrizität e und dem Formparameter p .

S symbolisiert die Sonne, P den Planeten auf dem Wege nach Q . Statt sich tangential in Richtung R zu bewegen, lenkt die Anziehungskraft der Sonne den Planeten nach Q ab. Für die Beziehung QT^2/QR interessiert das Viereck $QTPR$. Dieses enthält das Parallelogramm $QxPR$. Die Strecken Px und QR sind also gleich lang. Sie zeigen an, um wieviel der Planet von einer geradlinigen Bahn ablenkt wird. Als Höhe des Dreiecks SPQ steht die Strecke QT senkrecht auf der Verbindungslinie SP zwischen Sonne und Planet. Die Strecke Qx und deren Verlängerung Qv verlaufen parallel zur Tangente Pv . Qv ist also die elliptische Ordinate von v bei Verwendung der konjugierten Ellipsen-Durchmesser als Koordinatensystem. Die Strecke Pv ist demnach die Abszisse von v auf dem Halbdurchmesser PC .

* Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau; eMail Strutz_Christian@t-online.de

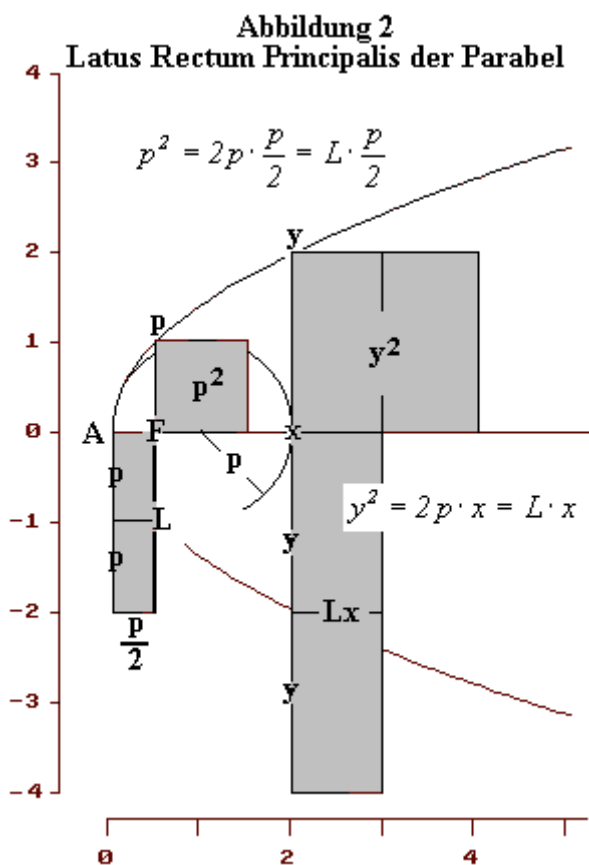
Was hat es aber mit Newtons *latera recta* auf sich und wo finden wir in der Zeichnung das *latus rectum* L , auf welches sich die Gleichung

$$(1) \quad QT^2 / QR = 2p = L$$

bezieht? Als einzigen Hinweis sehen wir in der Abb.1 den hinzugefügten Formparameter p , das *semi-latus rectum*, also $L/2$, der den zum Brennpunkt S gehörenden y -Wert nach

$$(2) \quad y_p = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b}{a} \cdot b = \frac{b^2}{a};$$

im kartesischen Koordinatensystem angibt. Ein Zusammenhang mit der Gleichung (1) ist zunächst nicht sichtbar. Zur Beantwortung der Frage lohnt es sich, zur Lehre der Kegelschnitte des APOLLONIUS von Pergae zurückzugehen. Nach seiner Definition handelt es sich bei der ὀρθία πλευρά, dem *latus rectum*, also der „senkrecht stehenden Flanke“ um „...die zum Durchmesser rechtwinklige Seite: Um zu dieser Parität herzustellen, steht die vom Durchmesser aus gezeichnete Ordinate im Quadrat.“** Dies sei zunächst anhand der παραβολή - der „Gleichung“ oder „Parabel“ - in der Abb.2 gezeigt.



Bei der Parabel besteht, wegen $x = y^2/2p$, exakte Übereinstimmung zwischen dem Quadrat der Ordinate p^2 und der Fläche des Rechtecks $p/2 \cdot L$. Den Wert für $p > 0$ können wir beliebig wählen. Nach ihm richtet sich die Form der Parabel.

Der Anwendungspunkt*** oder Brennpunkt F für das *latus rectum principalis* befindet sich genau an der Stelle $x = p/2 = L/4$. Im Pol A stehen die Tangente als Ordinate und der durch die Mitte verlaufende Durchmesser als Abszisse senkrecht aufeinander.

Der Radius des Krümmungskreises im Scheitel beträgt p , dessen Durchmesser ist gleich dem *latus rectum principalis* L .

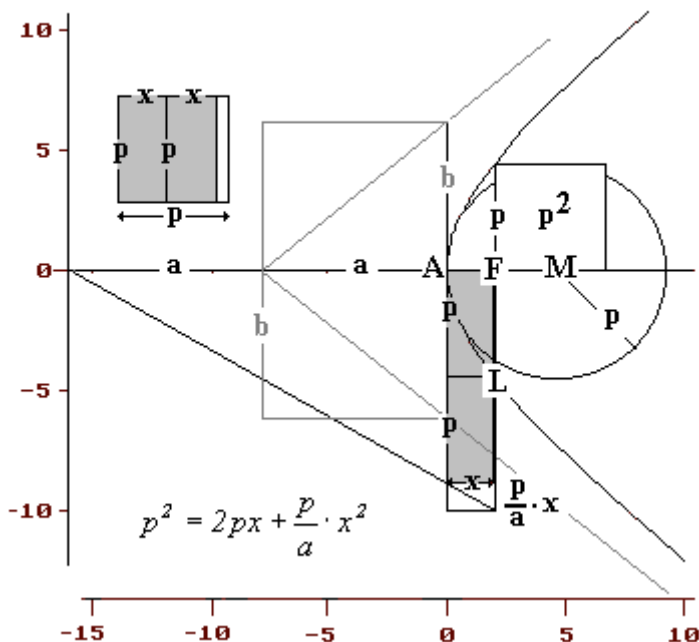
**

...ἡ ἐπί τὴν διάμετρον ὀρθία πλευρά; παρ' ἣν δύναται ἡ ἐπί τὴν διάμετρον τεταγμένως καταγομένη πλευρά. nach Apollonius I,13

*** ...τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γεθέντα σημεία ὀρθὰς ποιῶσι γωνίας...Apollonius III,45.

Hyperbel - ὑπερβολή - wie APOLLONIUS sagt, heißt „Übertreibung“ oder „Überschuß“.
Die Abb.3 zeigt, was dies im Sinne der Kegelschnitte bedeutet:

Abbildung 3
Latus Rectum Principalis der Hyperbel

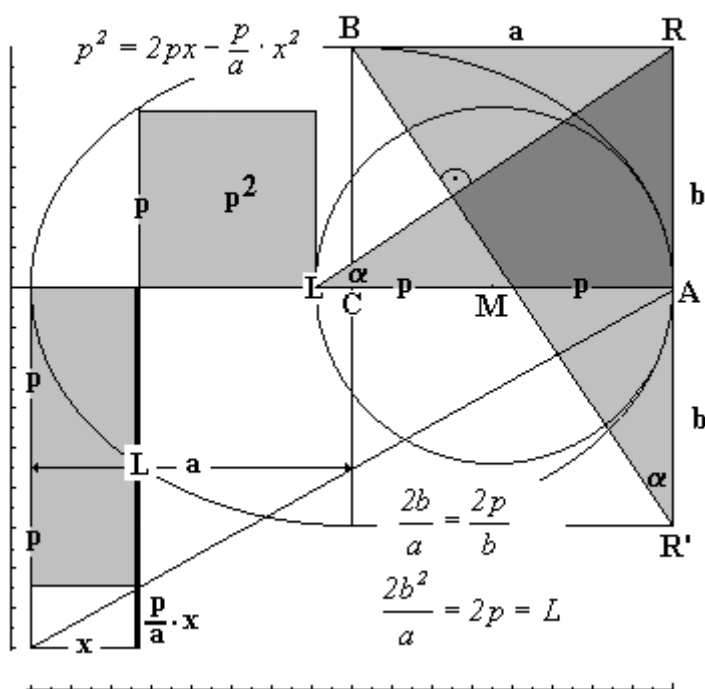


Bei der Hyperbel sind die Seitenlängen der Rechtecke a mal b vorgegeben. Die Asymptoten sind die Verlängerungen der Diagonalen dieser Rechtecke.

Die Länge von L beträgt $L=2b^2/a$. Da die Abszisse des Brennpunkts kleiner ist als $L/4$, übertrifft bei der Hyperbel die Fläche des Quadrats p^2 die Fläche des Rechtecks $2px$ um $p/a \cdot x^2$.

Auch bei der Hyperbel ist der Radius des Krümmungskreises im Scheitel gleich dem Parameter p .

Abbildung 4
Latus Rectum Principalis der Ellipse



Weil die Abszisse des Brennpunkts größer ist als $L/4$ und im Extremfall - dem Kreis - sogar gleich p ist, wird bei der Ellipse die Fläche des Quadrats p^2 zu klein, um dem Rechteck $2px$ pari zu bieten (Abb.4).

Ελλείπεις heißt übrigens „Mangel“. Deshalb muß, um den Mangel von p^2 auszugleichen, das Rechteck $2px$ auf die Fläche $p/a \cdot x^2$ verzichten.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $R'RB$ und LAR und aufgrund der Beziehung $L = 2b^2/a$ sehen wir, daß die Länge des *latus rectum* auch gleichbedeutend ist mit dem

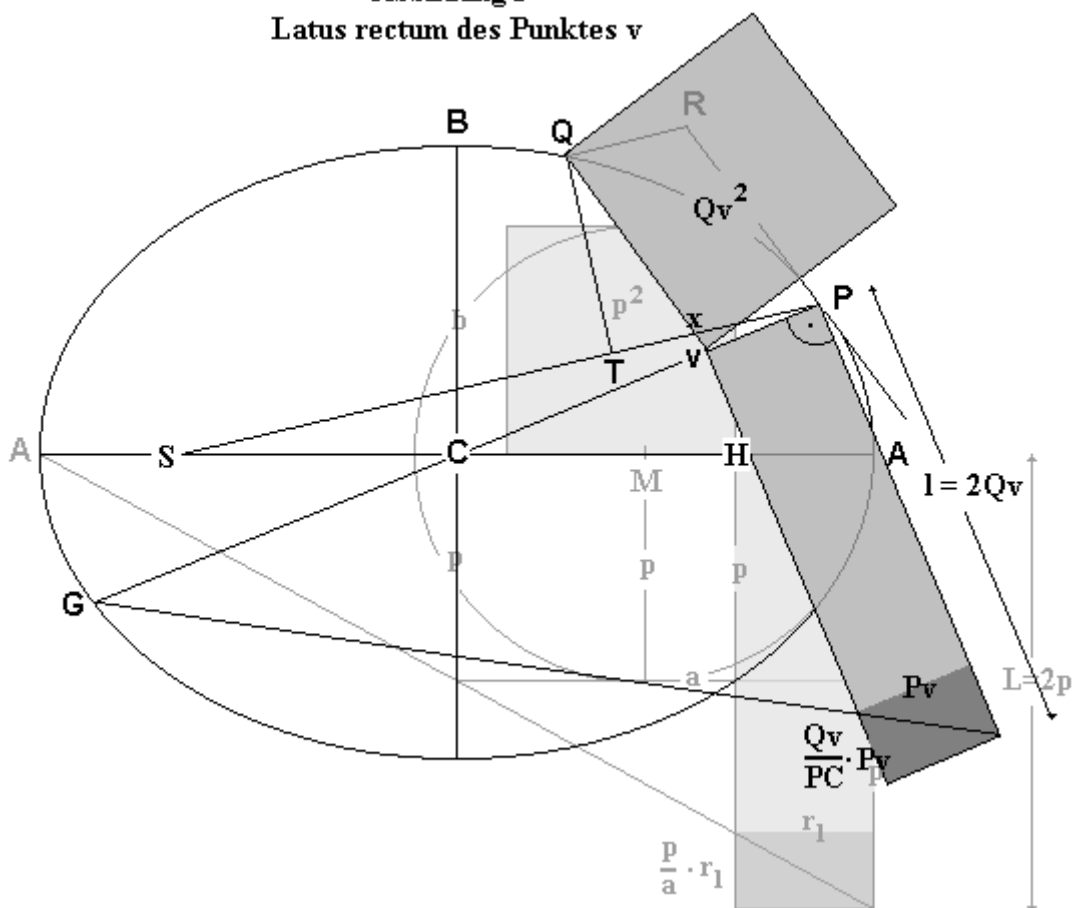
Durchmesser des Krümmungskreises im Hauptscheitel, dessen Radius die Länge von $L/2 = p$ hat.

Hauptkriterium für die Form eines Kegelschnitts ist nach Apollonius die vorhandene oder nicht vorhandene Äquivalenz zwischen dem Quadrat der Ordinate und dem Rechteck, das

aus der zum Durchmesser senkrecht stehenden doppelten Seitenlänge - *latus rectum* - und der Abszisse besteht.

Daß dieses einfach-geniale Prinzip nicht nur im orthogonal-kartesischen sondern auch im schiefwinkligen Koordinatensystem der konjugierten Durchmesser funktioniert, zeigt die Abb.5 als Erläuterung zu NEWTONS Zeichnung mit den Punkten S, P, Q und v .

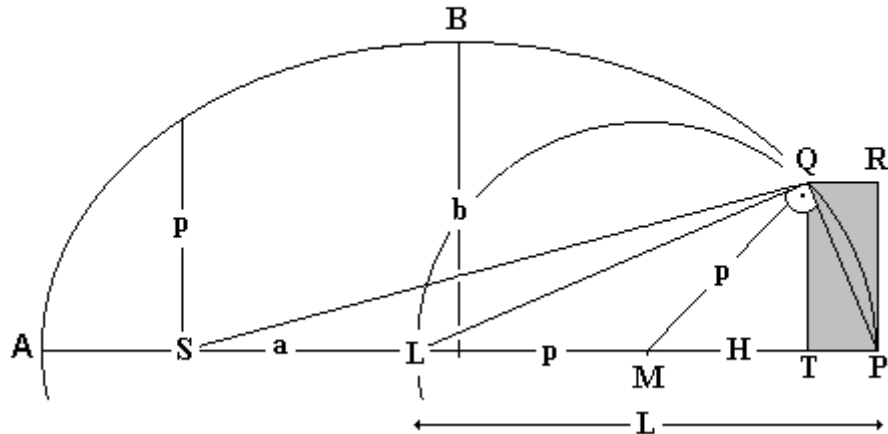
Abbildung 5
Latus rectum des Punktes v



Das am Punkt v entstandene latus rectum $l = 2Qv$ im Vordergrund stimmt natürlich nicht mit dem im Hintergrund vom Brennpunkt H ausgehenden und von Newton erwähnten *latus rectum principalis* $L = 2p$ überein. Dieses L ist eine Konstante, während alle übrigen, theoretisch unzählig vielen *latera recta* lediglich das Prinzip für die Parabel, Hyperbel und Ellipse wiedergeben.

Wollen wir uns nun vorstellen, die Ellipsenbahn als Modell sei eine feste Schiene, die Punkte seien durch Gummibänder miteinander verbunden und der Planet sei im Scheitel der Ellipse. Der Planet befindet sich hier entweder in der kürzesten Entfernung von der Sonne, dem Perihel oder, wie in der Abb.6, in der weitesten, dem Aphel. Hier stehen die Tangente an die Ellipse und der Durchmesser senkrecht aufeinander. Das Viereck $QTPR$ ist somit ein Rechteck geworden.

Abbildung 6
Planet P im Scheitelpunkt der Bahnellipse

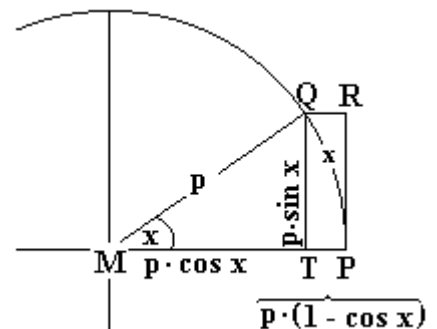


Die Abbildung verdeutlicht, wie durch P im Scheitel die Strecken QT , Qx und Qv zusammenfallen, wobei QT jetzt senkrecht auf der Hauptachse der Ellipse steht. Wir sehen aber auch, daß L als Durchmesser des Krümmungskreises nunmehr ins Zentrum der Betrachtung grückt ist. L als Punkt und S als Kraftzentrum sind auch nicht mehr weit voneinander entfernt.

Nun kommt es darauf an, den Abstand zwischen P und Q immer enger werden zu lassen. Eine Methode, dies zu erreichen besteht darin, den Zentriwinkel x bei M oder den Bogen x immer kleiner werden zu lassen. Welcher Grenzwert nach diesem Verfahren für den Quotienten QT^2/QR entsteht, zeigt die Gleichung (3).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{QT^2}{QR} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(p \cdot \sin x)^2}{p \cdot (1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[p \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \dots \right) \right]^2}{p \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right)} = \frac{p^2}{p} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2p = L \end{aligned}$$

(3)



Es zeigt sich als Ergebnis das *latus rectum principalis*.

Wir können den Scheitel-Krümmungskreis auch als Thaleskreis ansehen: Der Winkel zwischen PQ und QL beträgt 90° ; QT ist die Höhe des Dreiecks LQ . Würde die Sonne nicht an ihm ziehen, würde der Planet in der Zeit Δt die Inertial-Strecke $PR=QT$ zurücklegen. QR ist die durch die Zentralkraft verursachte Beschleunigungsstrecke des Planeten. Was passiert nun, wenn sich Q und P immer näher kommen, weil wir dem Zeitabschnitt Δt eine immer kürzere Zeit zugestehen? Die Gleichung (4) gibt darüber Auskunft:

$$\begin{aligned} (4) \quad QT^2 &= LT \cdot TP; & QT &= PR = v \cdot \Delta t \quad \text{Trägheitsstrecke} \\ QT^2 &= (L - QR) \cdot QR; & QR &= TP = a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \quad \text{Beschleunigungsstrecke} \end{aligned}$$

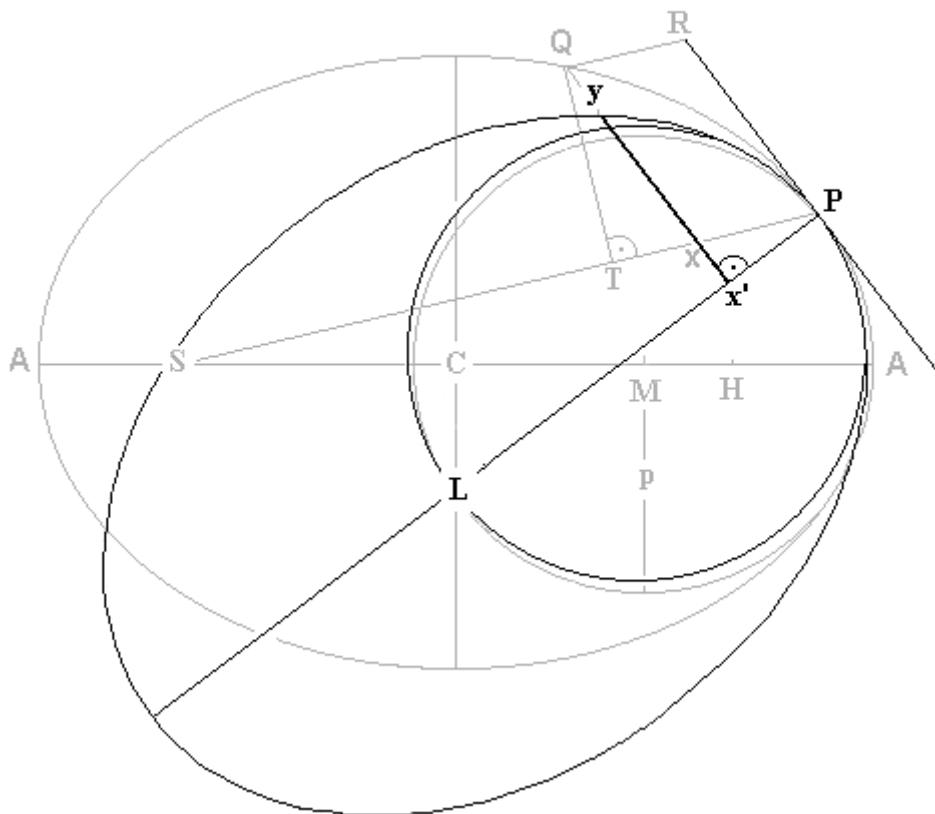
$$\frac{QT^2}{QR} = L - a \cdot \frac{\Delta t^2}{2}; \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{QT^2}{QR} = L$$

Es zeigt sich wieder das *latus rectum principalis* als Ergebnis. Dabei müssen wir bedenken, daß von der Gleichung (4) zur Gleichung (5) das Kraftzentrum von M nach L gewandert ist.

Ein weiterer Weg der Näherung von Q an P eröffnet sich uns, wenn wir bei Verwendung der Scheitelgleichung den Unterschied zwischen den Abszissenwerten P und Q immer kleiner werden lassen. Der y -Wert entspricht dann dem QT , während QR dem Betrag von $x' = |x_P - x_Q|$ gleichzusetzen ist (Abb. 7).

Abbildung 7
Punkt P als Scheitel der gedrehten Bahnellipse



Die Abb. 7 zeigt, wie der Punkt P zum Scheitel einer neuen Ellipse wird, deren Hauptachse senkrecht zur Tangente PR steht. Die Längen der großen Halbachse a und des *latus rectum principalis* bleiben unverändert.

$$(5) \quad y^2 = L \cdot (x_P - x_Q) - \frac{L}{2a} \cdot (x_P - x_Q)^2$$

$$\frac{y^2}{x_P - x_Q} = L - \frac{L}{2a} \cdot (x_P - x_Q); \quad QT = y; \quad QR = |x_P - x_Q|$$

$$\boxed{\lim_{x_P \rightarrow x_Q} \frac{y^2}{x_P - x_Q} = \frac{QT^2}{QR} = L}$$

Und wieder erscheint in (5) das L als strahlendes Ergebnis. Der Vorteil dieser Näherung besteht darin, daß wir nun jeden beliebigen Punktunterschied auf der Ellipse in Betracht ziehen können. Der Nachteil ist, daß wir mit der Scheitelgleichung implizit in Kauf genommen haben, daß die Koordinaten für Q , T und R nicht vom Kraftzentrum S , sondern vom Scheitelpunkt aus gelten. Noch sind wir nicht am Ziel.

Nun kommt der Moment für NEWTON! Denn er hat festgestellt, daß, wenn die Punkte P und Q - auch außerhalb der Scheitelpunkte - „unendlich nahe“ zusammenkommen

- einerseits der Spalt zwischen GP und SP und somit der Unterschied zwischen Qx und Qv verschwindet,
- andererseits die Strecke Gv als *ultima ratio* die Länge des Durchmessers PG annimmt: Das ist zweimal die Länge des Habdurchmessers PC .

Wie NEWTON dann das *latus rectum principalis* als Ergebnis der Zusammenfassung mehrerer Gleichungen und Kürzungen erscheinen läßt, zeigt die Gleichung (6).

$$(6) \quad \frac{QT^2}{QR} = \frac{PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2}{AC \cdot PC^2 \cdot CD^2}; \quad \frac{CB^2}{AC} = \frac{b^2}{a} = \frac{L}{2} = p$$

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{CB^2}{AC} \cdot \frac{Gv}{PC} = p \cdot \frac{Gv}{PC} \Rightarrow p \cdot 2 = L. \quad \lim_{Q \rightarrow P} \frac{Gv}{PC} = 2$$

Mit dieser Gleichung hat NEWTON den richtigen Bezugspunkt für $QT^2/QR = L$ gefunden: S , die Sonne als Gravitationszentrum. Zusammen mit der Tatsache, daß „die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht“ (2. Keplersches Gesetz) hat er hiermit die Grundlage für eine mathematisch formulierte Himmelsmechanik geschaffen.

Quellen:

- APOLLONII PERGEI CONICORUM LIBRI I-VI cum commentariis antiquis. I.L. Heiberg Hrsg. u. Übers. Teubner Verlag Stuttgart (1974).
- APOLLONIUS OF PERGA: Conics. Books I-III. Dana Densmore Ed., R.C. Taliaferro Übers., W.H. Donahue Diagr., H. Flaumenhaft Einf.. Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico (1998).
- APOLLONIUS OF PERGA: Conics. Books V to VII. The Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa. G.J.Toomer Transl.&Ed. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1990).
- BRACKENRIDGE, J.B.: The Key to Newton's Dynamics. The Kepler Problem and the *Principia*. Univ. of California press; Berkeley, Los Angeles, London (1995).

- GUICCIARDINI, N. 1999: Reading the Principia. The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736. Cambridge Univ. Press.
- NEWTON, I. 1684: De Motu Corporum in Gyrum. Aus: Guicciardini, N.: Newton: Ein Naturphilosoph und das System der Welten. Spektrum der Wissenschaft Verlag, Heidelberg (1999).

Lindau Bodensee Juni/Juli 2001