Wo finde ich einen Planeten auf seiner elliptischen Umlaufbahn? Bessel-Funktionen zur Lösung der Kepler'schen Gleichung

Christian Strutz

Das Problem

Von Kepler und Newton haben wir gelernt, dass sich ein Planet **P** auf seiner Ellipsenbahn um die Sonne **S** bewegt, die sich in einem der beiden Brennpunkte der Bahnellipse befindet. Die Längen der grossen Halbachse a und der kleinen Halbachse b beschreiben die Geometrie der Ellipse.

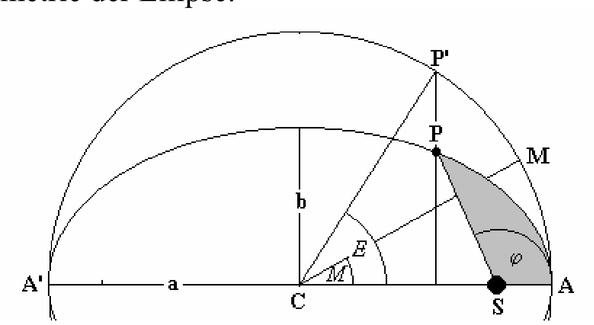

Abb.1: Beschreibung der drei Winkel *v, M* und *E*

Nach $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$ ist die numerische Exzentriztät e eine aus beiden Längen berechnete Größe. Die Verbindungslinie Sonne-Planet, der Radiusvektor r, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Um diesem Gesetz zu genügen, bewegt sich der Planet in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne. Gleichzeitig aber befinde sich ein gedachter Planet in gleichmässiger Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn als Umkreis, dessen Mittelpunkt **C**, das Zentrum der Ellipse und dessen Radius gleich der grossen Halbachse a ist. Die auf der grossen Halbachse senkrecht stehende Projektion der Planeten-Position **P** schneidet den Umkreis in **P'**. Es bilden sich drei Winkel, die wohl wegen ihrer Ungewöhnlichkeit als Anomalien bezeichnet werden (Abb.1):

$\angle$ **ASP** = φ wahre Anomalie,
$\angle$ **ACM** = M mittlere Anomalie,
$\angle$ **ACP'** = E exzentrische Anomalie.

Es gilt nun, einen Zusammenhang zwischen M und E zu finden.

Ausgangspunkt ist die sonnennächste Stelle **A**, das Perihel zur Zeit t_0. Hier hat der Planet **P** seine höchste Geschwindigkeit. Nach der Zeit t hat der Planet den Winkel φ bzw. die Fläche *ASP* überstrichen. Die Quotienten der Gleichung (1) setzen die verstrichene Zeit t in Relation zur gesamten Umlaufzeit T , den Winkel M in Relation zu den 360° des Kreises und die Fläche *ASP* in Relation zur Gesamtfläche der Ellipse (Abb.1).

$$(1) \qquad \frac{t}{T} = \frac{M}{2\pi} = \frac{Fl\ddot{a}che\ ASP}{a \cdot b \cdot \pi}.$$

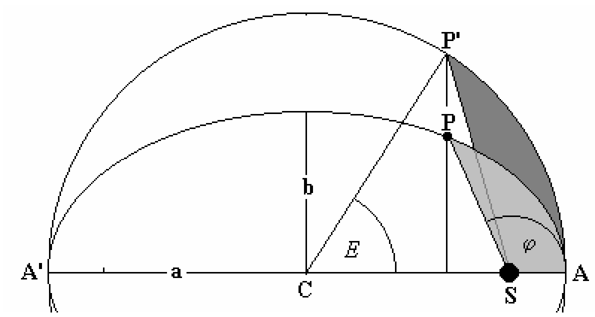

Abb.2: Beschreibung der Flächen ASP und ASP'

In genau der gleichen Zeit t ist aber auch, nach Abb.2 und Gleichung (2), die Fläche *ASP'* als Pojektion auf den Umkreis und Teil der Kreisfläche $a^2\pi$ entstanden.

$$(2) \qquad \frac{t}{T} = \frac{M}{2\pi} = \frac{Fl\ddot{a}che\ ASP'}{a^2 \cdot \pi}$$

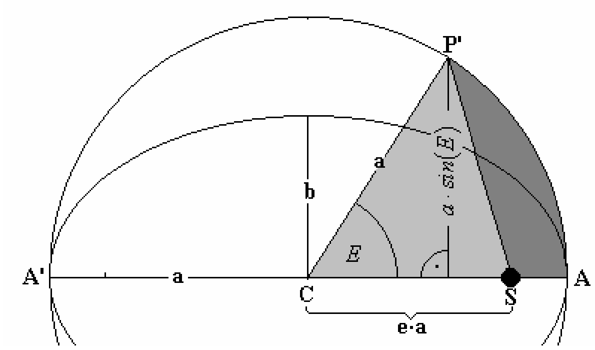

Abb.3: Berechnung der Fläche ASP' als Sektor ACP' minus Dreieck SCP'

Jetzt dreht es sich um die Berechnung der Fläche *ASP'* . Wir können sagen:

$$Fl\ddot{a}che\ ASP' = Sektor\ ACP' - Dreieck\ SCP'$$

und $sin(E) = \frac{H\ddot{o}he}{a}$; $H\ddot{o}he = a \cdot sin(E)$.

$$Fläche\,ASP' = \frac{1}{2}a^2 \cdot E - \frac{1}{2} \cdot ea \cdot a \cdot sin(E)$$
$$= \frac{a^2}{2} \cdot [E - e \cdot sin(E)]$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die Gleichung (2) ein

$$\frac{M}{2\pi} = \frac{a^2 \cdot [E - e \cdot sin(E)]}{2 \cdot a^2 \cdot \pi}$$

und erhalten nach Kürzen die berühmte Kepler'sche Gleichung (3).

(3) $M = E - e \cdot sin(E)$ oder

$$\boxed{E = M + e \cdot sin(E)}.$$

Das Besondere an dieser Gleichung ist das gleichzeitige Auftreten der exzentrischen Anomalie *E* als Winkel und als Argument der Sinus-Funktion *sin(E)*. Ein Tatbestand, der eine geschlossene Lösung verhindert und der die Köpfe der besten Mathematiker zum Glühen gebracht hat.

Ist *E* erst einmal ermittelt, so gestaltet sich die Beziehung zwischen der wahren Anomalie φ, also der realen Position des Planeten, und der exzentrischen Anomalie *E* mit Hilfe der Gleichung (4) als unproblematisch:

(4) $$cos(\varphi) = \frac{cos(E) - e}{1 - e \cdot cos(E)}.$$

Die Lösung

Eine Methode, die zeitliche Abhängigkeit der Planeten-Position zu bestimmen, sind Reihenentwicklungen. Entscheidend ist die Tatsache, dass die Bahnbewegung mit 2π periodisch ist. Eine Fourierreihe entwickelt die exzentrische Anomalie *E* nach der mittleren Anomalie *M*, die direkt von der gleichlaufenden Zeit abhängt. Dies geschehe mit der umgestellten Gleichung (3):

(3a) $E - M = e \cdot sin(E)$

Es ist klar, dass *E - M* eine ungerade, also zentralsymmetrisch zum Ursprung verlaufende periodische Funktion von *M* ist. Deshalb können wir sie in einer Fourier-Sinusreihe entwickeln .

$$E - M = B_1\,sin\,M + B_2\,sin\,2M + B_3\,sin\,3M + \ \ldots$$

Für ungerade Funktionen verschwinden die Koeffizienten A_n der Fourierreihe. Es verbleiben die Koeffizienten B_n , die wir wie folgt ermitteln:

$$B_n \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} (E - M) \cdot sin(nM) \cdot dM$$
$$B_n \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{cos(nM)}{n} (dE - dM)$$

Jetzt kommt der entscheidende Schritt: Wir ersetzen das Argument *(nM)* durch das für eine Bessel-Funktion typische Argument $nE - ne \cdot sin(E)$ der Gleichung (3) und erhalten für B_n das Integral

$$B_n = \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \int_0^{\pi} cos[nE - ne \cdot sin(E)] \cdot dE\,,$$

welches der Bessel-Funktion

$$B_n = \frac{2}{n} \cdot J_n(ne)$$

entspricht. Die so gewonnene Summenformel und deren Auflösung sind in der Gleichung (3b) dargestellt:

(3b) $$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n \cdot e)}{n} \cdot sin(nM);$$

$$E = M + 2J_1(e) \cdot sin(M) + J_2(2e) \cdot sin(2M) +$$
$$+ \frac{2}{3} \cdot J_3(3e) \cdot sin(3M) + \ \ldots$$

Zum Glück hat EXCEL® Bessel-Funktionen. So können wir konkret die exzentrische Anomalie *E* mit Hilfe dieses Programmes berechnen.

Gegeben sei der Periheldurchgang t_0 des Planeten Merkur am 26. September 2003. Wir wollen wissen, wo er sich, ausgedrückt in den Polarkoordinaten r und φ, am 15. Oktober dieses Jahres, also $t - t_0 = 18$ Tage nach dem Periheldurchgang, auf seiner elliptischen Umlaufbahn befindet. Hier sind die für die Berechnung erforderlichen Daten:

grosse Halbachse	a	0.387099 AE
num. Exzentrizität	e	0.205630
Umlaufzeit	T	87.969 Tage
Mittlere Anomalie	M	1.285650

Den Winkel für die mittlere Anomalie M haben wir nach der Formel

$$M = \frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - t_0\right) \tag{5}$$

ermittelt. Der nächste Schritt besteht darin, in Anwendung der Gleichung (3b) und Tabellenkalkulation die Grösse der exzentrischen Anomalie E zu bestimmen:

n	$B_n \cdot sin(nM)$	E_{cum}
0		1.2856
1	1.963E-01	1.4819
2	1.125E-02	1.4932
3	-2.088E-03	1.4911
4	-5.236E-04	1.4906
5	1.655E-05	1.4906

Es zeigt sich, dass wir mit Einbeziehung von J_5 eine sichere Schätzung von $E = 1.4906$ erreichen, um diese dann in die Gleichung (4) einzusetzen. Das Ergebnis lautet:
Wahre Anomalie $\varphi = 1.6988$ [rad];
Länge des Radiusvektors $r = 0.3807$ AE, wobei wir zur Berechnung von r die Formel

$$r(\varphi) = \frac{a \cdot \left(1 - e^2\right)}{1 + e \cdot cos(\varphi)} \tag{6}$$

verwendet haben.

Fazit

Sei der Begriff der „exzentrischen Anomalie“ auch noch so abstrakt und archaisch: Die Ortsbestimmung eines Planeten steht und fällt mit seiner genauen Berechnung.
Dieses Ziel erreichen wir aber nicht nur mit den Bessel-Funktionen. Setzen wir

$$g(E) = E - M - e \cdot sin(E) = 0\,, \tag{3b}$$

so ist E bei gegebenem M eine Nullstelle von g. Mit

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n - \frac{g(E_n)}{g'(E_n)} \\ &= \frac{M + e \cdot \left[sin(E_n) - E_n \cdot cos(E_n)\right]}{1 - e \cdot cos(E_n)} \end{aligned} \tag{7}$$

haben wir das effiziente Newton-Raphson-Verfahren zur iterativen Berechnung von Nullstellen zur Verfügung. Somit sind wir unabhängig vom Vorhandensein der Bessel-Funktionen im Formel-Inventar eines Computerprogrammes. Selbst mit unsinnigen ‘seed values’ E_0 kommen wir stracks zu sehr genauen Schätzungen der exzentrischen Anomalie, die natürlich ganz genau mit den Werten der Fourier-Bessel Berechnung übereinstimmen.

1. Frank Bowman: Introduction to Bessel funktions. p. 122. Dover Publications Inc., New York, 1958. ISBN 0-486-60462-4
2. Andreas Guthmann: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung. S. 129. BI-Wiss.-Verl. Mannheim 1994. ISBN 3-411-17051-4