VON APOLLONIUS ZUR HIMMELSMECHANIK:
auf der Spur zu NEWTONs Gravitationsformel

von
Christian Strutz*

Die umfangreichen Kommentare und Übersetzungen der Apollonius- und Newton-Experten aus jüngster Zeit ermöglichen es uns, mit Freude Newton-pur zu lesen und ein Stück weit zu erleben, wie NEWTON seine bahnbrechenden Erkenntnisse entwickelt hat.

Einleitung

Am 13. März 1964 hält der durch seine Feynman-Diagramme berühmte Physik-Professor und spätere Nobel-Preisträger Richard P. Feynman am California Institute of Technology eine Vorlesung für Erstsemester mit dem Titel „Die Bewegung der Planeten um die Sonne“ (GOODSTEIN und GOODSTEIN, 1996). Es geht um die mathematische Bestätigung der Vermutung KEPLERs, daß sich die Planeten nicht auf Kreis- sondern auf Ellipsenbahnen bewegen.

Ganz nach NEWTON leitet Feynman das zweite KEPLERsche Gesetz her:“Der Radiusvektor von der Sonne zu einem Planeten überstreicht zu gleichen Zeiten gleiche Flächen“. Der verbleibende Beweis stammt aber nicht von NEWTON, denn, so sagt er:“*Newton schrieb zu einer Zeit, in der die Kenntnis der Kegelschnitte ‘ in’ war, und so verwendet er ständig (mir) völlig undurchsichtige Eigenschaften der Kegelschnitte...“* . Armer Feynman! Ihm standen, wie vielen von uns, weder die neue Übersetzung von NEWTONs Principia (COHEN und WHITMAN, 1999) noch die kommentierten Übersetzungen der Bücher I-VII des Apollonius von Pergae über die Kegelschnitte zur Verfügung. Mit dem vorliegenden Beitrag möchte ich zeigen, daß, nach der sehr umfangreichen Vorarbeit der Newton- und Apollonius-Experten, die Lektüre von NEWTON-pur sowohl möglich ist als auch Spaß machen kann.

Proportionen

Zunächst ein paar Worte zur Art des Rechnens à la NEWTON: Wenn **a** zu **b** gleich **c** ist und **b** zu **d** gleich **e**: Wie verhält sich dann **a** zu **d**? Kaum jemand von uns wäre, so wie NEWTON, in der Lage, spontan zu antworten: „**a** zu **d** gleich **c** mal **e**“! Denn das Denken in der strikten Logik der Proportionen, wie dies offenbar die Pythagoräer taten, ist uns weitgehend abhanden gekommen. Daß wir solche Verhältnis-Ketten endlos weiterführen können, zeigt das folgende Beispiel:

$$\frac{a}{b} = c\,; \qquad a = c \cdot b$$

$$\frac{b}{d} = e\,; \qquad d = \frac{b}{e}\,; \qquad \frac{a}{d} = \frac{c \cdot b \cdot e}{b} = c \cdot e$$

$$\frac{d}{f} = g\,; \qquad f = \frac{d}{g}\,; \qquad \frac{a}{f} = \frac{c \cdot e \cdot d \cdot g}{d} = c \cdot e \cdot g$$

$$\frac{f}{h} = i\,; \qquad h = \frac{f}{i}\,; \qquad \frac{a}{h} = \frac{c \cdot e \cdot f \cdot g \cdot i}{f} = c \cdot e \cdot g \cdot i$$

$$\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

* Dr Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau, eMail Strutz_Christian@t-online.de
http://www.CapeCanaveral/4310/strutz/strutz.htm

Damit wird klar: Es handelt sich um den Quotienten zwischen dem ersten Zähler und dem letzten Nenner einer Reihe von Brüchen, bei welcher der nächstfolgende Bruch immer den Nenner seines Vorgängers als Zähler übernimmt.

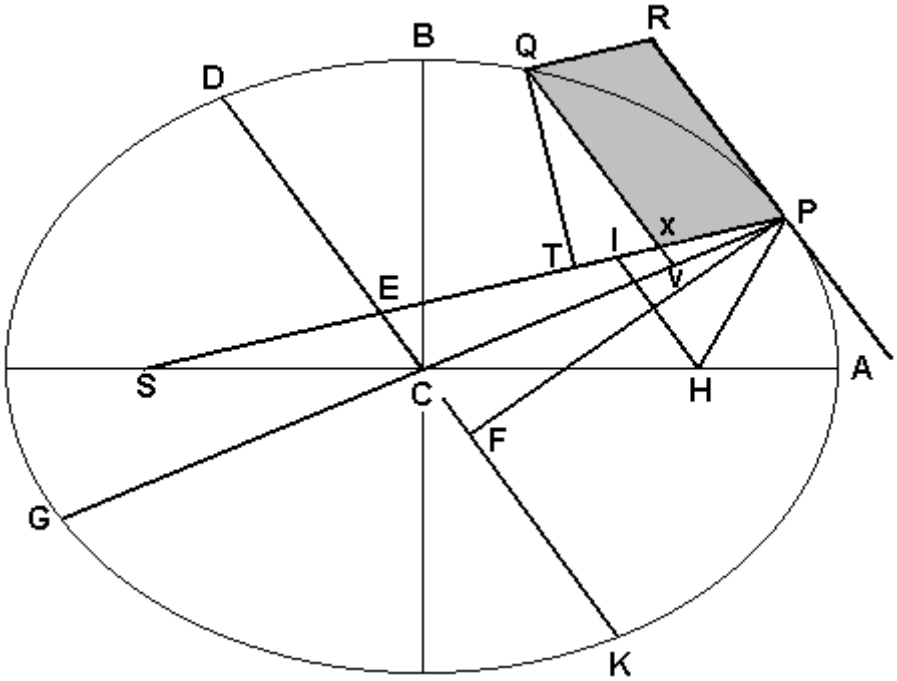
NEWTONs Theorem

Nach dieser Einstimmung können wir uns die Propositio 11 des ersten Buches der „Principia“ vornehmen: Sie gilt als Kernstück Isaac NEWTONs „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ aus den Jahren 1686, .. und 1726 als dritter Auflage. Als Problema3 war die Propositio 11 schon 1684 in der kurzen Abhandlung „De Motu Corporum in Gyrum“ veröffentlicht und ist als handschriftliches Dokument erhalten. Den Text und dessen Auslegung entnehme ich der Neuen Übersetzung von I.B. COHEN und A. WHITMAN (1999) sowie der Einführung in NEWTONs Principia von I.B. COHEN (1999):

„Ein Planet bewege sich auf einer Ellipsenbahn von *P* nach *Q*. Gesucht wird ein Gesetz, welches die auf den Brennpunkt der Ellipse gerichtete Kraft beschreibt...“.

Zur Erläuterung seiner weiteren Ausführungen zeigt NEWTON eine Skizze, deren Beschreibung wir nachvollziehen können.

Abbildung 1
Bahnellipse nach Newtons Skizze

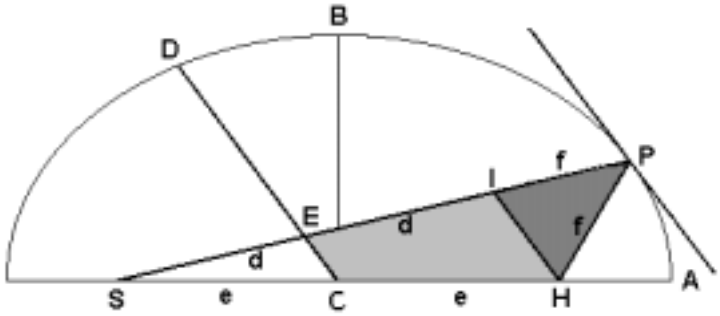


Von *P* (Planet) ausgehend zeichnen wir über *C* nach *G* den Durchmesser der Ellipse. Der dazu gehörende konjugierte Durchmesser *DK* verläuft definitionsgemäß parallel zur Tangente im Punkt *P* und schneidet den Radiusvektor *SP* = *r* in *E*. Die Normale zu dieser Tangente trifft auf *DK* im rechten Winkel im Punkt *F*. Eine weitere Parallele zur Tangente geht von *Q* aus und schneidet die Strecke *SP* in *x* und den Durchmesser *PG* in *v*, wobei S (sol = Sonne) der Haupt-Brennpunkt der Ellipse ist. Eine Parallele zu *SP* durch *Q* schneidet die Tangente in *R*, so daß das Parallelogramm *QxPR* entsteht. Die Parallele zur Tangente durch den Punkt *H*, dem zweiten Brennpunkt der Ellipse, schneidet den Brennstrahl *SP* in *I*. Außerdem gilt für den Parameter *L = 2p*:

$$L = \frac{2CB^2}{AC} \; ; \qquad \text{in gewohnter Schreibweise:} \quad 2p = \frac{2b^2}{a} \; ;$$

wobei p der Formparameter, b die kleine Halbachse und a die große Halbachse der Ellipse sind. Es folgt NEWTONs Behauptung, die Strecke EP sei gleich der Großen Halbachse AC . Zum Verständnis dieser als „NEWTONs Theorem“ bekannten Behauptung dient die nächste Abbildung.

Abbildung 2
Erklärung der Gleichung: $EP = AC$



Voraussetzung ist die Grundgleichung der Ellipsen, die, nach APOLLONIUS (Buch III, Prop. 52) besagt, daß die Summe der Brennstrahlen $SP = r$ und $PH = r'$ das Doppelte der Großen Halbachse $AC = a$ ergibt.

$$SP + PH = 2AC = 2a$$

Wir stellen fest: Die beiden Dreiecke SHI und SCE sind wegen der Parallelität von HI und CE einander ähnlich. Wenn nun die Abstände der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt C der Ellipse gleich sind $SC = CH = e$, so müssen auch die Strecken SE und EI gleich sein $SE = EI = d$. Da aber zur Komplettierung von SP nur noch ein Stück mit der Länge PH fehlt, das Dreieck IPH nach APOLLONIUS (Buch III, Prop.48) aber gleichschenklig ist, so folgt, daß PH und PI die gleiche Länge haben müssen: $IP = PH = f$.

$$\begin{aligned} 2d + f &= SP \; ; \\ f &= PH \; ; \\ 2d + 2f &= SP + PH = 2AC \; ; \\ d + f &= EP \; ; \\ EP &= AC \; . \end{aligned}$$

Die Beschleunigungsstrecke *QR*

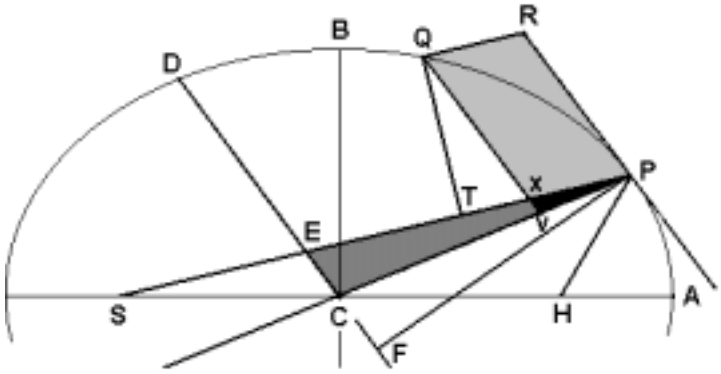
NEWTONs Beweisführung geht weiter: Er wird anhand des Parameters L zeigen, daß sich alle Himmelskörper, deren Bahnen von einer Zentralkaft im Brennpunkt abgelenkt werden, auf Kegelschnitten, also auf Ellipsen, Kreisen, Parabeln und Hyperbeln, bewegen, wobei diese Kraft mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung von der Zentralmasse abnimmt.

Zunächst formuliert NEWTON die erste für die Herleitung notwendige Gleichung:

(1) $$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{QR}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC} \ .$$

Abbildung 3

Erklärung der Gleichung (1): $\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{AC}{PC}$



Voraussetzung für die Gleichung (1) ist die Ähnlichkeit zwischen den Dreiecken *Pxv* und *PEC*, welche dadurch gegeben ist, daß *Pxv* ein Teil von *PEC* ist und daß *xv* parallel zu *EC* verläuft. Außerdem macht NEWTON von seiner vorherigen Feststellung Gebrauch, daß *EP* gleich *AC* ist und *QR* aufgrund des Parallelogramms *QxPR* gleich *Px* ist.Die Gleichung (2) erscheint einfach,

(2) $$\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv} \ ;$$

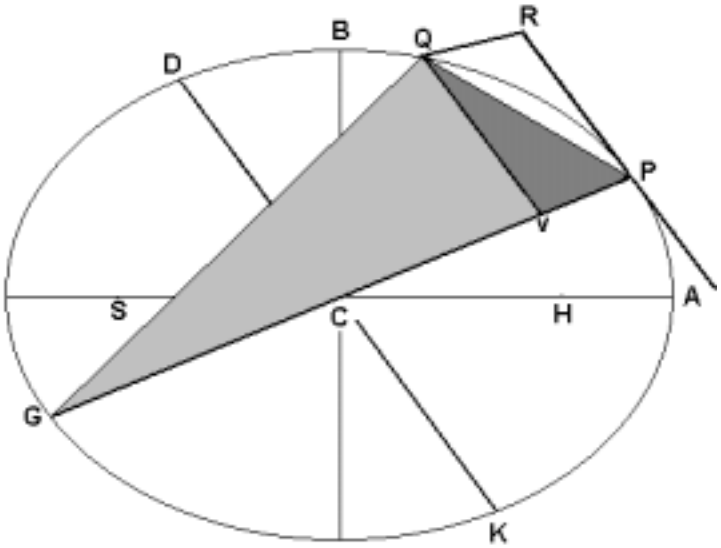
denn *Pv* im Zähler und Nenner wird nur gekürzt. In der nächsten Gleichung (3) brauchen wir aber das Produkt der Teilstücke *Gv* und *Pv* des Durchmessers *PG* und in der letzten Gleichung den Quotienten L/Gv, um den Faktor *2* zu erhalten und CB^2 kürzen zu können.

Ein „Brummer“ ganz anderen Formats ist die Gleichung (3), die aus der Lehre über die Kegelschnitte des APOLLONIUS von Pergae stammt (Buch I, Prop.38) und wie eine „elliptische“ Anwendung des Höhensatzes aussieht (Abb. 4): Das Produkt aus *Gv* und *vP* zum Quadrat der Ordinate *Qv* ist gleich dem Quotienten aus dem Quadrat des halben Durchmessers *PC* und dem Quadrat des halben konjugierten Durchmessers *CD*.

(3) $$\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \ .$$

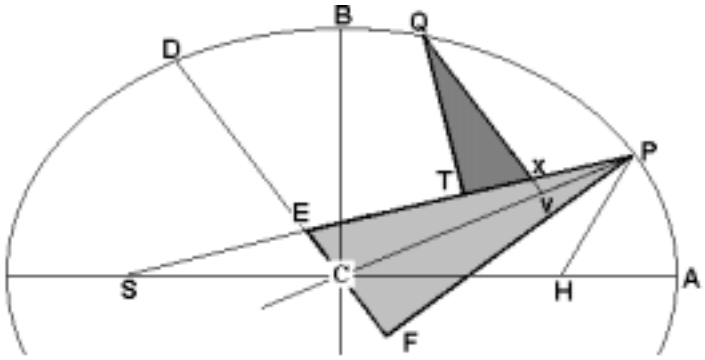
In der Tat stimmt diese Beziehung auch als Höhensatz eines rechtwinkligen Dreiecks unter dem Thaleskreis als besonderer Ellipse, wobei die aufeinander senkrecht stehenden Kreisradien als halbe konjugierte Durchmesser aufzufassen sind. Der Quotient PC^2/CD^2 tritt deshalb nicht in Erscheinung, weil die Halbdurchmesser als Radien einander gleichen.

Abbildung 4
Erläuterung der Gleichung (3): $CP^2 / CD^2 = (Gv \cdot Pv) / Qv^2$



Nun kommt ein bedeutsamer Schritt: Statt mit Qv^2 weiterzurechnen, nimmt NEWTON Qx^2, von dem er behauptet, daß es im Moment des Zusammentreffens von Q auf P gleich Qv^2 sei. Damit wird auch die „Basis“ des Kräfte-Vierecks $PvQR$ von GP auf SP verlagert, so daß das Parallelogramm $PRQx$ in die Berechnung eingeht. Es folgt die Gleichung (4) in zwei Etappen, zunächst aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke PEF und QxT.

Abbildung 5
Erklärung der Gleichung (4a): $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{EP^2}{PF^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$



Diese Ähnlichkeit ist gegeben durch die rechten Winkel bei F und T und die Tatsache, daß die beiden Winkel FEP und QxT gleich sind, weil sowohl EF und Qx als auch EP und Tx als Teilstrecke von EP zueinander parallel stehen.

(4.1) $\frac{Qx}{QT} = \frac{EP}{PF} = \frac{AC}{PF}$ wegen $EP = AC$; quadriert ergibt das

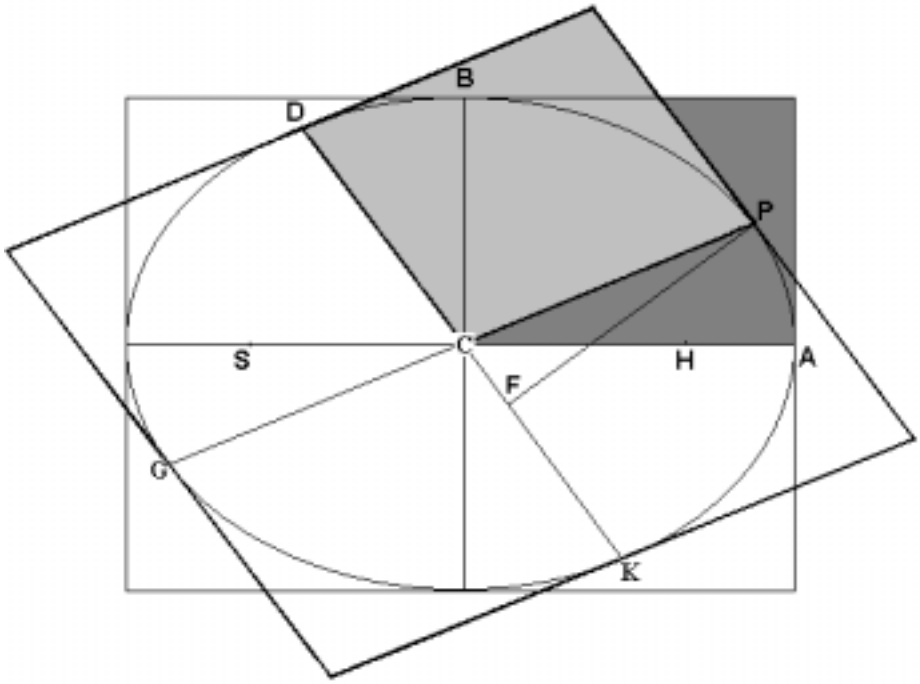
(4.2) $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$.

In der zweiten Etappe der Erklärung der Gleichung (4) handelt es sich um die Anwendung der Regel, daß alle Berührungsparallelogramme einer Ellipse die gleiche Fläche haben.

NEWTON merkt dazu trocken an: "*constat ex Conicis*", wobei es sich, nach GUICCARDINI (1999) um den Satz 31 des VII. Buches über die Lehre der Kegelschnitte des APOLLONIUS von Pergae handelt.

Abblidung 6

Erklärung der Gleichung (4b): $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}$



Voraussetzungen sind, daß $DK = 2CD$ und daß $PF \perp DK$, so daß daraus die ganze Sequenz der Gleichung (4.3) folgen kann:

$$DK \cdot PF = 2CA \cdot CB$$

$$2CD \cdot PF = 2CA \cdot CB$$

(4.3) $$\frac{CA}{PF} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CA^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}$$

Insgesamt haben wir es also mit vier Gleichungen in Form von Verhältnissen zu tun, wobei, wie im anfänglichen Beispiel, der nächstfolgende Bruch immer den Nenner seines Vorgängers als Zähler übernimmt.

(1) $$\frac{L \cdot QR}{L \cdot Pv} = \frac{AC}{PC};$$

(2) $$\frac{L \cdot Pv}{Gv \cdot Pv} = \frac{L}{Gv}; \qquad \frac{L \cdot QR}{Gv \cdot Pv} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{L}{Gv};$$

(3) $$\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}; \qquad \frac{L \cdot QR}{Qv^2} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{L}{Gv} \cdot \frac{PC^2}{CD^2}; \qquad \lim_{Q \to P} Qv^2 = Qx^2$$

(4) $$\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{CD^2}{CB^2} \qquad \frac{L \cdot QR}{QT^2} = \frac{AC}{PC} \cdot \frac{L}{Gv} \cdot \frac{PC^2}{CD^2} \cdot \frac{CD^2}{CB^2}; \qquad AC \cdot L = 2CB^2$$

und schließlich nach Kürzung

(5) $$\frac{L \cdot QR}{QT^2} = \frac{2PC}{Gv} \ .$$

Auffallend ist, daß das *latus rectum L* nicht auf NEWTONs Skizze erscheint, aber von Anfang an auf beiden Seiten der Gleichungen mitläuft, um erst am Schluß in (4) das Kürzen von CB^2 zu ermöglichen. Daß eine Berechnung ohne *L* das *latus rectum L* dann als Rechenergebnis erscheinen läßt, zeigt die Gleichung (6) als Umkehrung von (4).

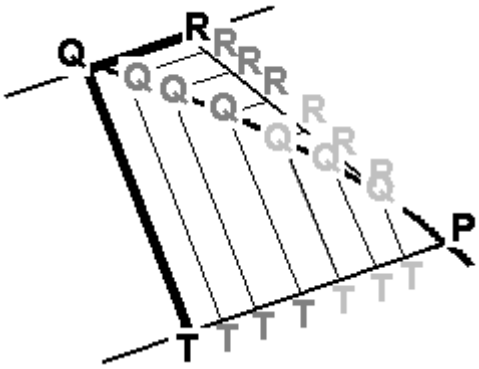
(6) $$\frac{QT^2}{QR} = \frac{PC \cdot Gv \cdot CD^2 \cdot CB^2}{AC \cdot PC^2 \cdot CD^2} \ ; \qquad \frac{CB^2}{AC} = \frac{L}{2} = p$$

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{CB^2}{AC} \cdot \frac{Gv}{PC} = p \cdot \frac{Gv}{PC} \Rightarrow p \cdot 2 = L \ . \qquad \lim_{Q \to P} \frac{Gv}{AC} = 2$$

Nun kommt das Entscheidende: Von den letzten beiden Quotienten der Gleichung (5) behauptet NEWTON als *ultima ratio*, daß sie gleich 1 seien, daß also $L \cdot QR = QT^2$ und $2PC = Gv$, wenn die Distanz zwischen *P* und *Q* unendlich klein geworden sei.

Um NEWTONs Behauptungen zu überprüfen, führen wir ganz bewußt ohne Differentialrechnung folgendes Experiment durch: Wir lassen den Abstand zwischen *Q* und *P* nach NEWTONs Vorschrift tatsächlich immer kleiner werden und berechnen mittels „Was-Wäre-Wenn“ Funktion der Tabellenkalkuation die Werte von Qx^2/Qv^2, $L \cdot QR / QT^2$ und $2PC/Gv$, die jeweils den Wert 1 ergeben müßten.

Abbildung 7
Prinzip der Näherung des Punktes Q an den Punkt P



Mit der großen Halbachse $a = 8$, der kleinen Halbachse $b = 6$ und $L = 9.0$ bestätigt dies die folgende Tabelle.

Tabelle 1
Effekt der Näherung der Abszisse des Punktes Q an den Punkt P (7.0|2.9)

X-Wert Q	Qx²/Qv²	L*QR/QT²	2PC/Gv	QT²/QR
2	0.833	1.423	1.185	6.326
3	0.861	1.307	1.126	6.888
4	0.891	1.210	1.077	7.441
5	0.921	1.128	1.039	7.981
6	0.956	1.058	1.012	8.505
6.5	0.976	1.028	1.003	8.757
6.9	0.995	1.005	1.000	8.953
6.99	0.999	1.001	1.000	8.995
6.999	1.000	1.000	1.000	9.000

Was ist geschehn? Ganz offensichtlich haben sich bei der Näherung von *Q* an *P* die Proportionen zwischen QT^2 und *QR* derart verändert, daß sie als Quotient $L \cdot QR / QT^2$ dem Wert 1 zugestrebt sind. Also ist nach (5) der Grenzwert Quotienten zwischen QT^2 und *QR* im Moment des Zusammentreffens der Punkte *P* und *Q* gleich dem Formparameter *L* .

(5a) $$\lim_{Q \to P} \frac{QT^2}{QR} = L \, .$$

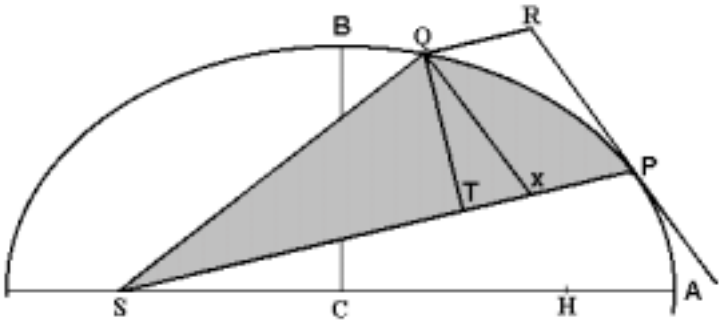
Wenn wir jetzt den Quotienten QT^2 / QR mit $2p$ gleichsetzen, so kommen wir, nachdem wir den Faktor 2 beseitigt haben, auf die uns bekannte Grundformel der Himmelsmechanik:

(7) $$\frac{QT^2}{L} = QR \; ; \; \frac{2B^2}{2p} = QR \; ; \quad \boxed{\frac{B^2}{p} = GM} \, ,$$

wobei *B* die Flächenkonstante, *G* die Gravitationskonstante und *M* die Zentralmasse bedeuten. Diese Formel zeigt uns das Zusammenspiel zwischen Trägheitsbewegung und Beschleunigung in Richtung Zentralmasse, wie dies NEWTON mit dem Parallelogramm *PRQx* und der gekrümmten „Diagonale“ *PQ* in seiner Skizze angedeutet hat.

Das Abstandsquadratgesetz und die Synthese zur Gravitationsformel
Die Geschichte ist damit noch nicht am Ende, denn jetzt kommt der Bezug zum Entfernungsquadratgesetz: Dazu betrachten wir nochmals die Ellipse; diesmal den Sektor *SPQ*. Mit unserer schon geschärften Phantasie können wir sagen, daß es sich, wenn *P* und *Q* ganz nahe beieinander liegen, um ein Dreieck handelt, dessen Höhe *QT* beträgt, wobei die Krümmung zwischen *P* und *Q* gerade im Begriff ist zu entstehen.

Abbildung 8
Abhängigkeit der Sektorenfläche *SPQ* vom Abstand *SP*



Die Fläche dieses als ganz winzig gedachten Dreiecks beträgt $½ \cdot SP \cdot QT$. Die Größe der Fläche bleibt nach dem zweiten KEPLERschen Gesetz in gleichen Zeitabschnitten Δt gleich und trägt als $B/2$ den Namen Flächengeschwindigkeit. Die doppelte Flächengeschwindigkeit hat die Bezeichnung Flächenkonstante B:

(6) $$\frac{B}{2} = \frac{½ \cdot (SP \cdot QT)}{\Delta t} \; ; \quad \text{quadriert:} \quad B^2 = \frac{SP^2 \cdot QT^2}{\Delta t^2} .$$

Die Beschleunigungsstrecke QR können wir als ein Integral der Zeit auffassen:

(7) $$QR = a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \; ; \qquad a = \frac{2QR}{\Delta t^2} ,$$

wobei sich die Beschleunigung a nach GALILEI umgekehrt proportional zum Quadrat der zur Beschleunigungsstrecke benötigten Zeit verhält. (6) in (7) eingesetzt ergibt:

(7a) $$a = \frac{2QR \cdot B^2}{SP^2 \cdot QT^2} \; ; \qquad \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} = \frac{1}{2p}$$
$$= \frac{2B^2}{2p} \cdot \frac{1}{SP^2} \; ; \qquad \frac{B^2}{p} = GM$$
$$= \frac{GM}{r^2} . \qquad \frac{1}{SP^2} = \frac{1}{r^2}$$

So sehen wir, daß sich die Zentripetalbeschleunigung, die einen Planeten von seiner geradlinigen Inertialbahn ablenkt, umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes *SP* verhält.

Wenn wir nun noch berücksichtigen, daß, nach NEWTON, *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* ist, so gilt dieses Abstandsquadratgesetz ebenfalls für die Kraft F. Damit ist der Weg frei für NEWTONs Gravitationsformel, wie wir sie aus den Physikbüchern kennen:

(8) $$\boxed{F = m \cdot a = m \cdot \frac{GM}{r^2}} .$$

Quellen:

APOLLONII PERGEI CONICORUM LIBRI I-VI cum commentariis antiquis. I.L. Heiberg Hrsg. u. Übers. Teubner Verlag Stuttgart (1974).

APOLLONIUS OF PERGA: Conics. Books I-III. Dana Densmore Ed. Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico (1998).

APOLLONIUS OF PERGA: Conics. Books V to VII. The Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa. G.J.Toomer Transl.&Ed. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1990).

GOODSTEIN, D.L. and J.R. GOODSTEIN 1996: Feynman's lost lecture. The motion of planets around the sun. W.W. Norton & Co. New York, London (1996).

GUICCARDINI, N. 1999: Reading the Principia. The Debate on Newton's Mathemetical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736. Cambridge Univ. Press.

NEWTON, I. 1726: The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy (3rd ed.). A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman; assisted by Julia Budenz. Preceded by A Guide to Newton's Principia. by I. Bernard Cohen. Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, London (1999).