Was hat eine Planetenbahn mit dem Entfernungsquadratgesetz zu tun?

Christian Strutz[1]

Die Lichtintensität nimmt mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung von einer Lichtquelle ab. Auch bei der elektromagnetischen Anziehungs- und Abstoßungskraft gilt dieses Prinzip (COULOMBsches Gesetz). Beiden Gesetzen gemeinsam ist die Punkt- oder Kugelform des Strahlers und die kugelförmige Ausbreitung ihrer Wirkung. Also müßte auch die Sonne kugelförmig wirken, denn auch ihre Anziehungskraft nimmt nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz[2] mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung ab. Erstaunlich ist aber, daß zwischen dem Gravitationsgesetz und den beiden anderen Gesetzen nur eine „formale“ und keine funktionale Übereinstimmung[3] bestehen soll.

Was hat also das Entfernungsquadratgesetz mit den Ellipsenbahnen der Planeten und Satelliten zu tun? Allein diese Frage hätte NEWTON auf die - wohl damals in Cambridge noch nicht vorhandene - Palme gebracht: Für ihn war das Entfernungsquadratgesetz die Voraussetzung für die Bahnform der Planeten und anderen Himmelskörper. Der folgende Text soll zeigen, in welcher Hinsicht die Gravitation mit den Gesetzmäßigkeiten der Lichtintensität und der Ladungsdichte übereinstimmt.

Halten wir uns an NEWTONs Herleitung des Zweiten KEPLERschen Gesetzes in seiner Propositio 1: „Der Radiusvektor zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“ Den Nachweis für die Richtigkeit dieser Feststellung zeigt die Abb.1.

Ein Planet ist mit der Geschwindigkeit v_1 auf dem Weg von *A* über *P* nach *R*. In *P* befindet er sich im Abstand *r'* vom Zentrum *S* , der Sonne. Würde keine andere Kraft auf den Planeten einwirken, würde er sich aufgrund seiner Trägheit mit unveränderter Geschwindigkeit v_1 in Richtung *R* weiterbewegen: $AP = PR = v_1 \cdot \Delta t$. Aber eine Kraft zieht ihn in Richtung Zentrum, so daß er statt auf *R* auf das etwas weniger von *S* entfernte *Q* mit der Geschwindigkeit v_2 im gleichen Zeitabschnitt Δt trifft. Es entsteht das Parallelogramm *PRQT* mit der Diagonalen $PQ = v_2 \cdot \Delta t$. NEWTON stellt nun fest, daß die Dreiecke *SAP* und *SPQ* flächengleich sind: Wenn, wegen gleicher Grundlinie $AP = PR$ und gemeinsamer Höhe h_1 die Dreiecke *SAP* und *SPR* flächengleich sind und wenn wegen gemeinsamer Grundlinie *SP* und gemeinsamer Höhe *QT* die Dreiecke *SPQ* und *SPR* flächengleich sind, dann müssen auch die Dreiecke *SAP* und *SPQ* flächengleich sein.

Abbildung 1
Zweites Keplersches Gesetz:
Flächengleichheit der Dreiecke SAP, SPR und SPQ

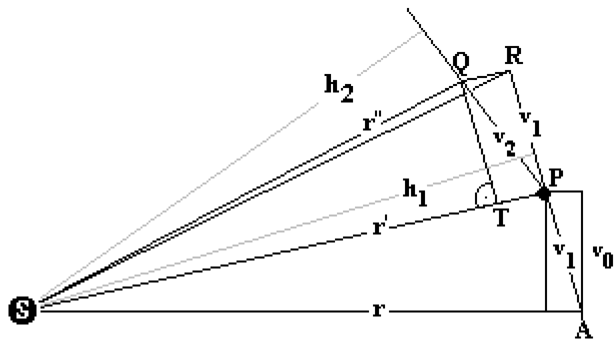
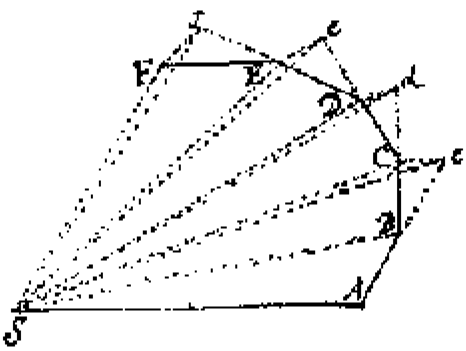


Abbildung 2
Newtons Zeichnung eines Ablenkungspolygons



Aus: *De Motu Corporum in Gyrum*
NEWTON, 1684

Die Geschwindigkeit des Planeten hat sich jedoch verändert: $v_1 \neq v_2$. Die Verallgemeinerung dieses Resultats liefert den Flächensatz und die Definition der Flächenkonstanten B:

(1) $$\boxed{SP \cdot QT = v_1 \cdot h_1 = v_2 \cdot h_2 = \ldots = v \cdot h = B}.$$

„Das Produkt aus der Geschwindigkeit v und dem Lot h vom Zentralkörper S auf den Geschwindigkeitsvektor des Planeten ist gleich der Flächenkonstanten B." In der weiteren Folge entsteht nach NEWTONs Skizze (Abb.2) ein Polygon[4]. Eine „unbegrenzte" Anzahl von flächengleichen Ablenkungsdreiecken führt nach NEWTON bei „unendlich" kleinen Zeitabschnitten zu einer kontinuierlichen Krümmung.
Um die Ursache dieser Krümmung zu ergründen, müssen wir das Dreieck SPQ und die Strecke QR, um welche die Sonne den Planeten an sich zieht, untersuchen. Die Fläche dieses als sehr klein gedachten Dreiecks SPQ beträgt $½ \cdot SP \cdot QT$. Nach dem Zweiten KEPLERschen Gesetz bleibt diese Dreiecksfläche als Hälfte der Flächenkonstante in gleichen Zeitabschnitten konstant. Wegen ihrer Eigenschaft als Fläche pro Zeit hat $B/2$ den Namen Flächengeschwindigkeit.
Nehmen wir an, ein Planet sei nach einem Umlauf immer wieder in der gleichen Positionen zu finden. Er befinde sich also auf einer regelmäßigen Kreis- oder Ellipsenbahn. Diese Annahme berechtigt uns, die Dreiecke der Flächengeschwindigkeit $B/2$ mit der Umlaufszeit T zu multiplizieren. Die Gesamtheit dieser Dreiecke überstreicht bei einem Umlauf eine Kreisfläche oder die Fläche einer Ellipse, deren Größe $a \cdot b \cdot \pi$, also große Halbachse a mal kleine Halbachse b mal Kreiszahl π beträgt:

(2) $$\frac{B}{2} \cdot T = a \cdot b \cdot \pi$$

Quadrieren wir beide Seiten dieser Gleichung, so ergibt dies: $(B^2/4) \cdot T^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2$. Substituieren wir dann das Quadrat der kleinen Halbachse b mit dem Produkt aus der großen Halbachse a und dem Ellipsenparameter p, denn $b^2 = a \cdot p$, so entsteht:

(3) $$\boxed{\frac{B^2}{p} = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} = const. \;=\; GM}.$$

Wir erhalten das Dritte KEPLERsche Gesetz: Es zeigt, daß eine direkte Proportionalität zwischen dem Quadrat der Umlaufszeit und der dritten Potenz des mittleren Abstands zwischen Zentralkörper und Planet besteht. Natürlich gilt dies auch für eine Kreisbahn, bei der $r = a = p$ gilt. Bei bekannter Gravitationskonstante G können wir den konstanten Quotient B^2/p dem Produkt GM aus der Gravitationskonstanten G mal der Zentralmasse M gleichsetzen.
Die Definition der Flächenkonstante besagt, daß der Planet pro Zeitabschnitt Δt die Fläche $½ \cdot SP \cdot QT$ des Dreiecks SPQ überstreicht:

(4) $$\frac{B}{2} = \frac{½ \cdot (SP \cdot QT)}{\Delta t} \;;$$

auf beiden Seiten quadriert und nach $(\Delta t)^2$ aufgelöst lautet diese Gleichung:

(4.1) $$(\Delta t)^2 = \frac{SP^2 \cdot QT^2}{B^2}.$$

Die Momentangeschwindigkeit v nach konstanter Beschleunigung a aus der Ruhe beträgt $v = a_c \cdot \Delta t$. Die Beschleunigungsstrecke QR können wir als ein Integral der Zeit auffassen: Ihre Länge beträgt:

(5) $$QR = a_c \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2};$$

nach der Beschleunigung a_c aufgelöst:

(5.1) $$a_c = \frac{2QR}{(\Delta t)^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass nach GALILEI die Beschleunigung a_c umgekehrt proportional zum Quadrat der zur Beschleunigungsstrecke QR benötigten Zeit ist. Ersetzen wir $(\Delta t)^2$ nach (4.1) durch $(SP^2 \cdot QT^2)/B^2$, so kommen wir auf:

(6) $$a_c = \frac{2QR \cdot B^2}{SP^2 \cdot QT^2}.$$

Nach NEWTONs Propositio 11 ist aber $QR/QT^2 = 1/2p$, wobei $2p = L$ gleich dem *latus rectum principalis* L der Bahnellipse ist, so dass

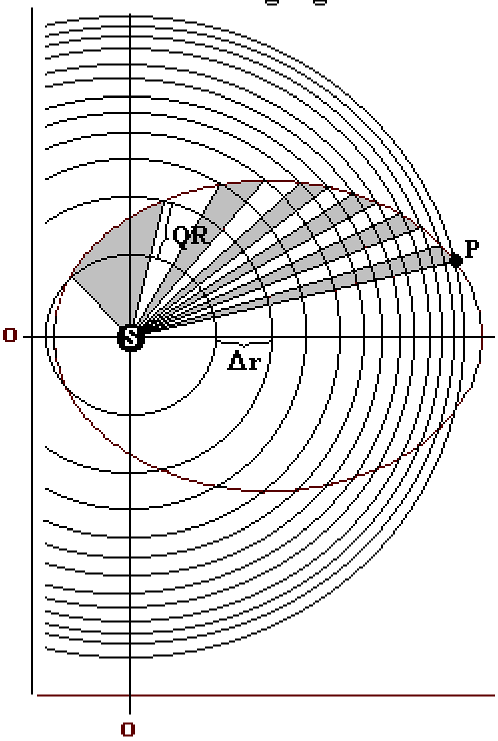
(6.1) $$a_c = \frac{2B^2}{2p} \cdot \frac{1}{SP^2}.$$

Bezeichnen wir nach (3) die Konstante B^2/p als GM und den Abstand SP als r, so erhalten wir endlich

(6.2) $$\boxed{a_c = \frac{GM}{r^2}}.$$

Die Zentripetalbeschleunigung, die einen Planeten von seiner gradlinigen Inertialbahn ablenkt, verhält sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen Zentralkörper und Planet.

Abbildung 3
Gleiche Flächen in gleichen Zeiten aus konzentrischen Linien gleicher Beschleunigung



In Analogie zur Strahlendichte im photometrischen Grundgesetz und zur elektrischen Ladung im COULOMBschen Gesetz handelt es sich bei der Zentripetalbeschleunigung offenbar um konzentrische Hüllen gleicher Gravitationsintensität mit entsprechender Beschleunigung.
Dies soll die Abb.3 verdeutlichen: Auf dem Weg vom Aphel zum Perihel wird die Beschleunigungsstrecke *QR* nach dem Entfernungsquadratgesetz immer größer und verkürzt den nächstfolgenden Abstand *SP*:

$$SP_1 - QR_1 = SP_2 \; usw..$$

Wenn wir nun noch berücksichtigen, daß, nach NEWTON, *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* ist, so gilt das Abstandsquadratgesetz gleichermaßen für die Kraft *F*.

(7) $$\boxed{F = m \cdot a_c = m \cdot \frac{GM}{r^2}}.$$

Dies ist also der Zusammenhang zwischen einer Planetenbahn und dem Entfernungsquadratgesetz: Sowohl die Beschleunigung a_c als auch die Kraft *F* hängen direkt von der für das Sonnensystem konstanten *GM* (Gravitationskonstante mal Sonnenmasse) und umgekehrt vom Quadrat der Entfernung *r* zwischen Sonne und Planet ab.
Streng genommen handelt es sich, nach NEWTONs *actio* = *reactio*, bei $r = SP$ um den Abstand des Planeten zum gemeinsamen Schwerpunkt von Sonne und Planet: Beide ziehen sich wechselseitig an. Der Abstand zum gemeinsamen Schwerpunkt ist bei großem Massenunterschied deshalb kürzer als zwischen den Zentren beider Himmelskörper.

---

[1] Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau Bodensee. eMail Strutz_Christian@t-online.de
[2] Newton, I. 1726: The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy (3rd ed.). A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman; assisted by Julia Budenz. Preceded by A Guide to Newton’s Principia. by I. Bernard Cohen. Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, London (1999).
[3] Hammer, K. und H. Hammer 1994: Grundkurs der Physik 2. Oldenbourg Vrlg. München Wien 1994.
[4] aus Guicciardini, N. 1998: Newton: Ein Naturphilosoph und das System der Welten. Spektrum Akademischer Vrlg., Heidelberg 1998.