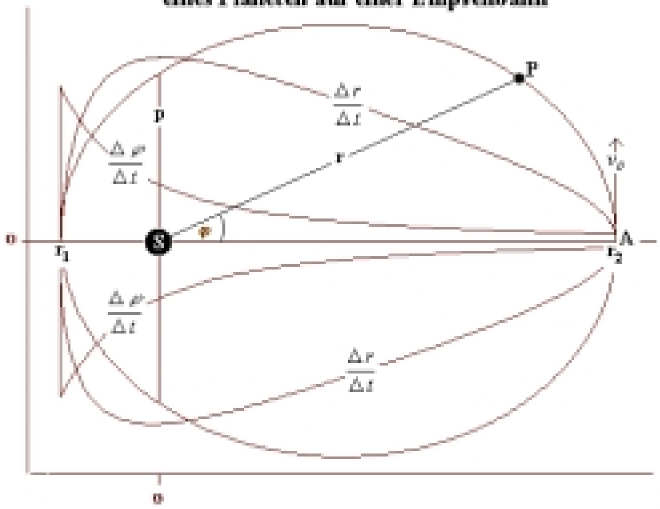
Welche Energie steckt in einer Planetenbahn?[1]

Christian Strutz[2]

Die Position eines Planeten läßt sich mittels Polarkoordinaten mit r und φ bestimmen: Der Radius r ist der Radiusvektor oder die Entfernung zwischen dem Zentralgestirn S und dem Planeten P und φ der Positionswinkel oder das Azimut. Die Bewegung des Planeten zeigt sich durch die Veränderung der Radial- und Azimutalkomponente je Zeiteinheit.

Im Punkt A, der weitesten Entfernung vom Zentralkörper, befindet sich während eines winzig gedachten Zeitraums Δt der zum Maximalradius r_2 senkrechte Geschwindigkeitsvektor v_0 . Bei einem Satelliten läßt sich v_0 mit Raketenantrieb steuern. Niemand weiß aber, woher ein Planet diese *vis insita* bezieht. Vom Urknall?

Abbildung 1
Veränderung des Abstandes r und des Winkels φ eines Planeten auf einer Ellipsenbahn



Ein winziger Schritt weiter, und schon wird die Fahrtrichtung des Planeten durch die Anziehungskraft der Sonne umgelenkt und in eine Umlaufbahn gezwungen, wenn er nicht schnell genug ist, ihr zu entfliehen. So ändert sich der Radius r, der Winkel φ und, durch die Kombination der beiden Änderungen, die resultierende Geschwindigkeit v.

Die Radialgeschwindigkeit $\Delta r/\Delta t$ vergrößert sich kontinuierlich bis zu ihrem Maximum bei $\varphi = 90°$, um dann rapide auf Null im Perihel zu fallen. Auf dem Weg zurück zum Aphel erfolgt der gleiche Verlauf mit negativem Vorzeichen.

Auch die Winkelgeschwindigkeit $\Delta\varphi /\Delta t$ zeigt einen Anstieg vom Aphel zum Perihel und, auf dem Rückweg, eine Verringerung vom Perihel zum Aphel. Ihr Verlauf erinnert an die Hyperbelform des Entfernungsquadratgesetzes. Dies ist nicht verwunderlich, denn $\Delta\varphi /\Delta t$ erweist sich als äquivalent zum Quotienten zwischen der Flächenkonstanten B und dem Quadrat der Entfernung r.

$$(1) \qquad \frac{\Delta\,\varphi}{\Delta\,t} \approx \frac{|B|}{r^2}$$

Umgekehrt, wenn wir $\Delta\varphi /\Delta t$ infinitesimal zu $d\varphi/dt$ reduzieren und mit r^2 multiplizieren, erhalten wir den Flächensatz in Polarkoordinaten:

$$(1.1) \qquad r^2 \cdot \frac{d\,\varphi}{d\,t} = B\,.$$

So zeigt auch der Flächensatz den Zusammenhang zwischen dem Entfernungsquadratgesetz und einer Planetenbahn.

Betrachten wir nun den energetischen Aspekt dieses Zusammenspiels nach der NEWTONschen Gravitationsformel: Sonne und Planet ziehen sich durch ihre Anziehungskraft um den Betrag $dr = r_0 - r_1$; $r_0 > r_1$ wechselseitig an. Dann ist die Energie, die zur Verkürzung der Entfernung notwendig ist:

$$dF = GM \cdot \frac{m}{r^2} \cdot dr\;;$$

$$(2) \qquad F = GM \cdot m \cdot \int_{r0}^{r1} \frac{1}{r^2} \cdot dr\;;$$

$$= GM \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right);$$

mit GM als dem Produkt der Gravitationskonstanten G mal der Masse M der Sonne als Zentralkörper.

Wenn der Abstand zwischen dem Planeten und der Sonne geringer wird, hat dies die Zunahme der Geschwindigkeit des Planeten von v_0 auf v_1 zur Folge. Die Steigerung der Bewegungsenergie ist

$$(3) \qquad dK = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m \cdot v \cdot dv\,.$$

Diese kinetische Energie ist das Integral der Geschwindigkeit von v_0 bis v_1 :

$$(3.1) \qquad K = m \cdot \int_{v0}^{v1} v \cdot dv = m \cdot \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right).$$

Beide Energie-Formen gehen ständig ineinander über, d.h. sie befinden sich in konstanter Wechselbeziehung, so daß die Gesamtenergie des Planeten $A = F = -K$:

(4) $A = GM\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right) = -m\cdot\left(\frac{v_1^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}\right)$

Wir kürzen die Masse *m* des Planeten und erhalten die Gesamtenergie *A* eines Planeten mit der Standardmasse *1*:

(4.1)

$$A = \frac{v_0^2}{2}-\frac{GM}{r_0} = \frac{v_1^2}{2}-\frac{GM}{r_1} = \;\ldots\; = \frac{v^2}{2}-\frac{GM}{r}.$$

Unter Berücksichtigung der Radial- und Azimutalkomponente entsteht:

(4.2) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r}$.

So ist jede Umlaufbahn durch zwei Konstanten charakterisiert: Einerseits durch die Konstante *A* als Ausdruck für die Gesamtenergie, d.h. der Summe der Bewegungs- und der Gravitationsenergie, andererseits durch die in *A* enthaltene Flächenkonstante *B*.
Indem wir nach (1.1) den Ausdruck $(d\varphi/dt)^2$ durch B^2/r^4 ersetzen, haben wir die Gelegenheit, r^2 im Zähler gegen r^4 im Nenner zu kürzen.

(4.3) $$A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{B^2}{2}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{GM}{r}\ .$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\\[6pt]\frac{B^2}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\end{array}\right\}\frac{v^2}{2}\\[10pt]\left.\begin{array}{l}\frac{B^2}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\\[6pt]-\frac{GM}{r}\end{array}\right\}V_{eff(r)}\end{array}\right\}A$$

Die Klammern zeigen, wie nun die Gesamtenergie *A* zusammengesetzt ist: aus der Radial- und der Azimutalkompnente der kinetischen Energie $v^2/2$ sowie dem Potential $-GM/r$.
Wenn wir aus der Gesamtenergie die Azimutalkomponente $B^2/2r^2$ als Integral des Flächensatzes und das Potential $-GM/r$ als Integral der Zentripetalbeschleunigung herausgreifen, erhalten wir als Summenkurve die Funktion des effektiven Potentials $V_{eff(r)}$ und deren Ableitungen nach *r*:

(5) $$V_{eff(r)} = \frac{B^2}{2}\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{GM}{r}\ ;$$

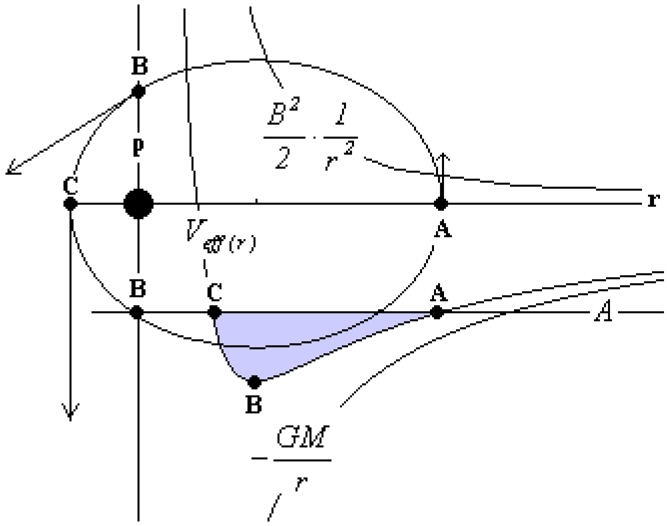
$$V'_{eff(r)} = -\frac{B^2}{r^3}+\frac{GM}{r^2}\ ;$$

$$V''_{eff(r)} = 3\cdot\frac{B^2}{r^4}-\frac{GM}{r^3}\ .$$

Mathematisch gesehen befindet sich das Minimum der „Potentialmulde“ von $V_{eff(r)}$ dort, wo die Steigung der Funktion, also die erste Ableitung, gleich Null ist und die zweite Ableitung an dieser Stelle ein positives Vorzeichen hat:

(5.1) $$\frac{B^2}{r^3} = \frac{GM}{r^2}\ ;$$

Abbildung 2
Entstehung einer Potentialmulde



$$r_{V\,min} = \frac{B^2}{GM} = p\ ;\qquad V''_{(r=p)} > 0\ .$$

Das Ergebnis zeigt, dass das Minimum **B** dann erreicht ist, wenn $r = p$, wenn also der Abstand *r* gleich dem Formparameter *p* der Bahnellipse ist.
In beiden Scheitelpunkten einer Bahnellipse, im kürzesten (r_1) und weitesten (r_2) Abstand vom Zentralkörper, erreicht das effektive Potential als oberstes Limit den Wert der Gesamtenergie *A*, weil sich zu diesem Zeitpunkt der Abstand *r* zwischen Sonne und Planet nicht verändert und demnach *dr/dt* den Wert Null hat.
Deshalb pendelt der Wert von $V_{eff(r)}$ bei einem Umlauf des Planeten von **A** über **B** nach **C** und von dort wieder über **B** nach **A** zurück. So bestätigt die Existenz einer Potentialmulde mit ihrer oberen Begrenzung, daß sich der Planet auf einer geschlossenen Umlaufbahn bewegt.

---

[1] Die Anregung zu dieser Arbeit habe ich von Fu-Kwun Hwang NTNU durch sein Kepler Motion applet (1997) bekommen: http://www.phy.ntnu.edu.tw/java

[2] Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 LINDAU; eMail Strutz_Christian@t-online.de