Höhenflug einer Wasserrakete

Christian Strutz und Angelo Rupflin

Eine Wasserrakete: Was ist das?
Kaum hätten wir gedacht, dass sich eine ganz gwöhnliche Wasserflasche aus Plastik für zwei Sekunden in die Luft erhebt, den Höchstpunkt bei 17 Metern erreicht, um dann im umliegenden Gebüsch für lange Zeit zu verschwinden…, hätte nicht einer von uns diesen Vorgang wenigstens teilweise filmisch erfaßt. Erst die geometrisch-rechnerische Auswertung hat uns die Gewißheit gebracht, dass das Erlebte nicht im Bereich des Zufälligen sondern im unendlich Wiederholbaren zu finden ist.

Abb. 1: Wasserrakete aus PET mit "Nase", Alu-Stab als Leitwerk, 250 ml Wasser Füllung und Gartenschlauch-Schelle als Abdichtungshilfe. Als Startrampe dient die Basis eines Theodoliten. Die Luftzufuhr erfolgt von unterhalb der blauen Platte.

Dabei handelt es sich nur um das reizvolle Wechselspiel zwischen hoch komprimierter Luft als Treibsatz und inkompressiblem Wasser samt Verschlußkorken mit Blitzventil ($m_P = 0.255\,\mathrm{kg}$)[1] als Geschoß, wobei der Schuß wegen des großen Gewichtsunterschiedes "nach hinten" bzw. nach unten losgeht, während der verbleibende leichte Raketenkörper ($m_C = 0.09\,\mathrm{kg}$), die PET Flasche, den entscheidenden Rückstoß nach oben erfährt.
Die Abbildung 1 zeigt unsere Wasserrakete. Vorversuche hatten ergeben, dass sich der gekerbte Flaschenboden schlecht als Raketenspitze eignet. Also haben wir ihn mit der abgesägten, kuppelförmigen Spitze einer anderen Wasserflasche versehen. Den Flaschenhals haben wir mit der Hälfte eines roten Bällchens abgedeckt. Um das zuvor häufig beobachtete Trudeln während des Steigfluges zu vermeiden, haben wir nach dem Motto "was gut ist für Feuerwerks-Raketen kann Wasserraketen nicht schaden" mit Isolierband eine 100 cm lange 25 g schwere Aluminium-Stange als Leitwerk seitlich an den Raketenkörper geklebt.
Den entscheidenden Durchbruch für einen effizienten Druckaufbau haben wir erfahren, nachdem wir Kerben im Flaschenhalsgewinde eingesägt und den Korken mittels Gartenschlauch-Schelle festgeschraubt hatten (Abb. 1): Nach kräftigem Pumpen mit einer stehenden Fahrradpumpe haben wir den für den Start notwendigen Innendruck von etwa 6 bar erreicht (Abb. 2).

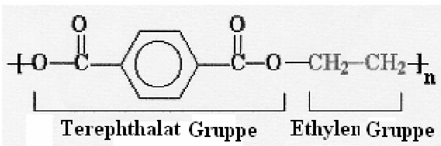
Abb. 2: Fahrrad-Luftpumpe, Typ: Rennkompressor, max. 16 bar, mit Manometer, 120 cm Hochdruckschlauch und AVACS Schlauchanschluß.

Wie konnte die Wasserflasche dem gewaltigen Überdruck von 6 bar standhalten?

Vergegenwärtigen wir uns:

$$6\,\text{bar} = 600\,000\,\text{Pa (Pascal)} = 600\,000\ \text{N/m}^2\,.$$

Eine Versuchsreihe in den USA im letzten Jahr hat ergeben, dass PET-Flaschen erst bei einem Überdruck von 140 bis 180 psi, das sind 9.7 bis 12.5 bar, platzen[2]. So ist PET (Polyethylen-Terephthalat) offenbar ein ganz besonders druckresistenter Kunststoff. Als Polyester lautet seine Strukturformel:



Das Carbonyl-Sauerstoffatom hat eine etwas negative, das Carbonyl-Kohlenstoffatom eine leicht positive Ladung. Diese gegensätzlichen Ladungen sind Ausdruck der Polarität der Terephthalat-Gruppen, die den starken Zusammenhalt der Polyester-Fasern bei der Kristallisation von PET bewirken[3]. Die Stoß- und Splitterfestigkeit von PET ist von besonderem Vorteil. Der einzige Nachteil besteht in der niedrigen Schmelztemperatur, verbunden mit der leichten Verformbarkeit der Flaschen. Man sollte keine heißen Getränke in PET Flaschen gießen!

Die Antriebsphase: Welchen Schub hat die Rakete erfahren?

Zugegeben, der Start der Wasserrakete war chaotisch: keine präzise Zeit-Vorhersage, kein cooler Count Down sondern eifriges Pumpen bis zum mit Spannung erwarteten, knallenden "Plop".

Da die Fahrradpumpe mit einem Manometer ausgestattet ist, haben wir den Druck beim Start der Rakete abgelesen: etwa 6 bar. Mit diesem Druck wurde ein Viertel-Liter Wasser samt Korken mit Blitzventil aus der Flasche gestoßen.

Abb. 3: Korken mit Fahrrad-Blitzventil. Der Korken ist der Länge nach durchbohrt, um den ungehinderten Lufteintritt zu ermöglichen.

Die beiden Größen: der Druck in der Flasche ($P = 6\,\text{bar}$) und die Dichte des Wassers ($\rho_w = 1000\,\text{kg/m}^3$) sind nach Bernoulli die Komponenten zur Berechnung der Ausströmgeschwindigkeit v_{ex}:

(1) $$P = \rho_w \cdot \frac{v_{ex}^2}{2}\,;$$

$$v_{ex} = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{\rho_w}} \approx 35\,\text{m/s}\,.$$

In Kombination mit der Düsenaustrittsfläche, also der Querschnittsfläche des Flaschenhalses ($A_D = 0.0004\,\text{m}^2$), ermöglicht uns die Kenntnis der Ausströmgeschwindigkeit v_{ex}, den Treibstoffdurchsatz, d.h. die Menge ausgestoßenen Wassers pro Sekunde μ, zu berechnen:

(2) $$\mu = A_D \cdot \rho_w \cdot v_{ex} \approx 12.8\,\text{kg/s}\,.$$

Umgekehrt erhalten wir aus m_P und μ sofort die "Brenndauer" b, d.h. die Zeit, die das Wasser gebraucht hat, um aus der Flasche zu entweichen:

(3) $$b = \frac{m_P}{\mu} \approx 0.02\,\text{s}\,;$$

das sind winzige zwei hundertstel Sekunden!... also eher ein plötzlicher Schuß als ein mit einfachen Mitteln meßbarer Vorgang.

Die Schubkraft T (T für "thrust") ist das Produkt aus Austrittsgeschwindigkeit v_{ex} mal Treibstoffdurchsatz μ:

(4) $T = v_{ex} \cdot \mu \approx 430\,\text{N}$.

Indem wir die Gleichung (2) einsetzen, erhalten wir:

$$T = v_{ex} \cdot A_D \cdot \rho_w \cdot v_{ex};$$
$$= v_{ex}^2 \cdot A_D \cdot \rho_w .$$

Das Quadrat der Austrittsgeschwindigkeit substituieren wir mit der Gleichung (1):

$$T = \frac{2P}{\rho_w} \cdot A_D \cdot \rho_w \;;$$

(4a) $\boxed{T = 2P \cdot A_D}$.

Zur Berechnung der Schubkraft benötigen wir also nur den Druck und die Düsenaustrittsfläche. Der Gleichung 4a nach müssten wir mit einer größeren Austrittsöffnung, also einem weiteren Flaschenhals einen größeren Schub und somit eine gesteigerte Flughöhe erreichen. Die erstaunliche Höhe von $T = 430\,\text{N}$ veranlaßte uns, dieses berechnete Ergebnis per Zug-Experiment zu überprüfen. Einen vorläufigen Hinweis für die Richtigkeit der bisherigen Berechnungen liefert die Schätzung der Antriebsgeschwindigkeit v_b aus dem Impuls-Erhaltungsgesetz:

(5) $v_b = v_{ex} \cdot \dfrac{m_P}{m_P + m_C} \approx 25\,\text{m/s}$.

In der Größenordnung stimmt dieses Ergebnis überraschend gut mit der Auswertung des Video Clips überein.

Welche Information konnten wir dem Video Clip entlocken?

Einer von uns hat den Start der Rakete aus 11 m Höhe gefilmt (Abb. 4)[4]: Die scheinbar gleiche Höhe der Raketenspitze mit dem Kopf eines Zuschauers (Abb. 4a) und einem Buschzweig im folgenden Bild (Abb. 4b) hat es uns ermöglicht, die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete zu schätzen (Abb. 5). Die waagerechten (*a*) und senkrechten Abstände (d) haben wir im nachhinein vermessen.

Abb. 4: Start der Wasserrakete: Es wird gepumpt. Die Rakete befindet sich noch auf ihrer Rampe.

Abb. 4a: 4/41 Sekunden später: Die Rakete hat abgehoben. Die Spitze befindet sich scheinbar in Kopfhöhe des Zuschauers. Deutlich sichtbar: die Vernebelung des ausgestoßenen Wassers.

Abb. 4b: Nach 8/41 Sekunden: Die Rakete befindet sich scheinbar auf der Höhe eines Buschzweiges. Der Nebelschleier hat sich auseinandergezogen.

Wenn man die Bilder des Raketenstarts genauer betrachtet stellt man fest, dass die Rakete einen langen Wasserschweif hinter sich herzieht. Die genaue Dauer kann man nur sehr grob abschätzen, und zwar anhand der Spezifikationen der Kamera, insbesondere des Zeitintervalls des Videos, nämlich ca. 0.098 Sekunden. Da im dritten Bild unterhalb der Rakete immernoch Wasser zu erkennen ist, vermutet man eine Beschleunigungsphase zwischen 0.196 und 0.294 Sekunden.
Rechnerisch kommt aber ein Wert von 0,0196 Sekunden heraus, also etwa zwei Hundertstel Sekunden, was deutlich unter dem grob geschätzten Wert liegt. Woran liegt es, dass sich der mathematische Wert so sehr von der Schätzung unterscheidet?
Die Schätzung beruht darauf, dass man unterhalb der Rakete Wassertröpfchen sehen kann, und man daraus die Brenndauer ableitet. Ein gravierender Trugschluss. Denn die Wassertröpfchen die sich auch nach einigen Metern noch unterhalb der Rakete befinden sind einfach von der Rakete mitgerissen worden, und machen den Anschein, dass die Rakete immernoch Wasser ausstößt. Es handelt sich also nur um eine optische Täuschung.
Die Abbildung 5 zeigt das Prinzip der geometrischen Auswertung: Es kommt darauf an, die durch scheinbar gleiche Höhe bestimmbaren Richtungswinkel α durch Peilung zu bestimmen und die tatsächlich erreichte Höhe h der Raketenspitze nach der Gleichung (6) zu berechnen:

(6) $h = d + a \cdot \tan\alpha$.

In 8/41 Sekunden hat die Rakentenspitze den Höhenunterschied von 4.6 m zurückgelegt. Die Geschwindigkeit hat also 24 m/s betragen.

Die Leerlauf-Phase
Nachdem bereits nach 2/100 Sekunden das Wasser und der Luftüberschuß ausgestoßen, aber nur 16 cm Höhe gewonnen waren, befand sich die Rakete im Leerlauf.

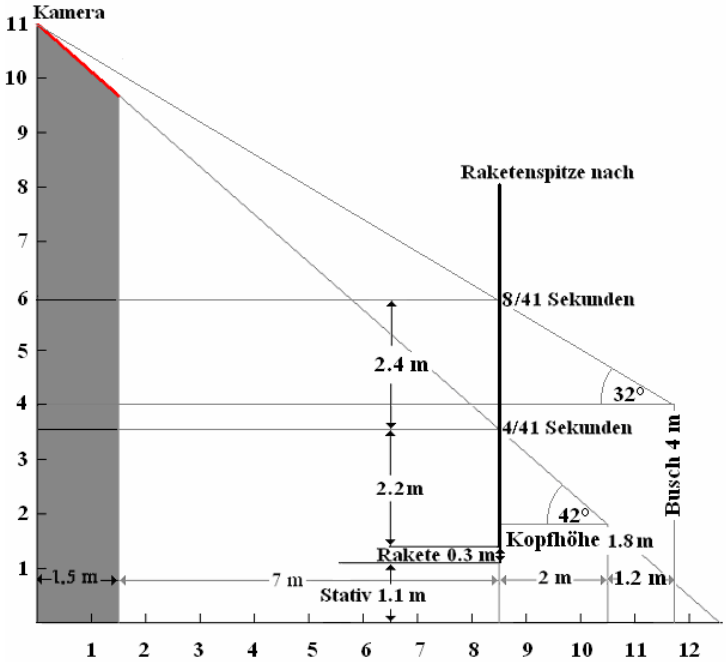


Abb. 5: Geometrische Schätzung der Raketen-Geschwindigkeit aus den Abb. 4,4a,4b.

In dieser Phase müssen wir die bremsende Wirkung des Luftwiderstandes berücksichtigen. Dazu brauchen wir:

- die Form, die sich im Reibungsbeiwert (drag coefficient $c_d = 1$) niederschlägt,
- die Querschnittsfläche der Rakete ($A_R = 0.005\,\mathrm{m}^2$) und
- die Luftdichte ($\rho_L = 1.223\,\mathrm{kg/m}^3$).

Da die Wasserflasche mit ihrer "Nase" weder extrem klobig noch extrem windschlüpfrig erscheint, haben wir der der Raketenform intuitiv den Wert $c_d = 1$ erteilt. Die Übereinstimmung zwischen der berechneten und beobachteten Gipfelhöhe scheint uns in dieser Zuordnung recht zu geben.
In Abhängigkeit von der abnehmenden Bewegungsenergie $v^2/2$ der Rakete ist der Luftwiderstand R nach Bernoulli:

(7) $$R = \frac{v^2}{2} \cdot \rho_L \cdot c_d \cdot A_R \ ;$$
oder
$$\boxed{R = v^2 \cdot k};$$

wobei

$$k = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot c_d \cdot A_R \approx 0.004\,\text{kg/m}\,.$$

Bei Höchstgeschwindigkeit (v_b) hat der Luftwiderstand R der Wasserrakete immerhin 1.9 N betragen.
Die abnehmende Geschwindigkeit müssen wir als Integral vom "Brennschluß" (v_b) bis zum Stillstand im Scheitelpunkt ($v = 0$) berücksichtigen[5]. Dies gilt sowohl für die Berechnung der Leerlaufhöhe h_c als auch für die Schätzung der dazu benötigten Zeit t_c. Für beide Integrale finden wir Lösungen[6] im "Bronstein". In die Hilfsgröße q gehen neben der spezifischen Konstanten k die Erdbeschleunigung ($g = 9.80665\,\text{m/s}^2$) und die Leermasse der Wasserrakete ($m_C = 0.09\,\text{kg}$; c für "coast" = Leerlauf) ein. Die Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse.

Formel	Wert	Einheit
Gewichtskraft $m_C \cdot g$	0.90	N
Hilfsgröße $q = \sqrt{\frac{m_C \cdot g}{k}}$	16.95	
Leerlaufzeit $t_C = \frac{m_C}{k} \cdot \int_{vb}^{0} \frac{dv}{q^2 + v^2}$; $t_C = \frac{m_C}{k} \cdot \frac{1}{q} \cdot \arctan\left(\frac{v_b}{q}\right)$	1.68	s
Scheitelzeit $t_S = b + t_C$	1.70	s
Leerlaufhöhe $h_C = \frac{m_C}{k} \cdot \int_{vb}^{0} \frac{v}{q^2 - v^2} \cdot dv$; $h_C = \frac{m_C}{2k} \cdot \ln\left(\frac{q^2 - v_b^2}{q^2}\right)$	16.69	m
Gesamthöhe h_t	16.85	m

Tab. 1: Kennwerte der Leerlauf-Phase

Mit erstaunlicher Genauigkeit stimmt die Beobachtung: "Die Rakete flog höher als das Hausdach" mit der Berechnung $h_C \approx 17$ m überein.

Hat wirklich ein Schub von 430 N die Rakete in die Luft gejagt?

Haben Sie jemals eine Flasche mit einem Flaschenzug geöffnet? Von der Namensgebung her müsste dies eine alltägliche Sache sein:
Statt des Blitzventils haben wir einen Korkenzieher bis zum Anschlag in den Korken gedreht. Dieser war, wie zum Raketen-Start, mittels Gartenschlauch-Schelle im Hals der Wasserflasche fixiert. Mit einem stabilen Perlonseil haben wir den Griff des Korkenziehers mit dem unteren Haken eines Dreifach-Flaschenzuges verbunden. Der obere Haken hat zur Aufhängung im Dachgebälk gedient. Eine Umlenkrolle hat das Seil zur Testlast geführt.
Ein Vorversuch hatte ergeben, dass bei der beschriebenen Aufhängung ein Wassereimer mit 4 kg Gesamtgewicht einer 10 kg Last am Flaschenzug die Waage hält. Demnach beträgt die Netto-Übersetzung inklusive Reibungs- und Dehnungsverlusten 1 : 2.5 (Abb. 7).

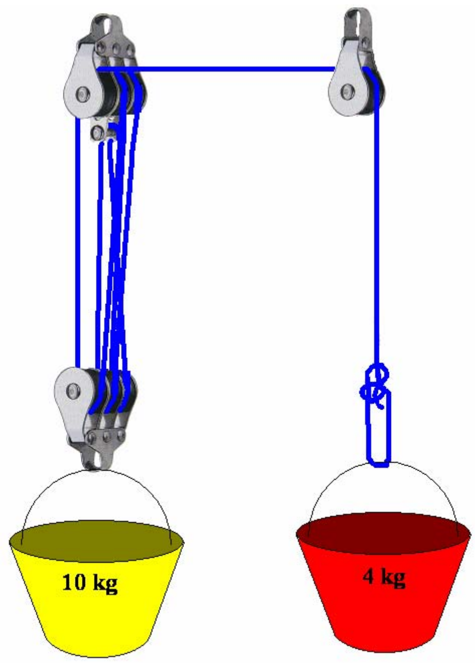


Abb. 7: Prinzip der Feststellung der Netto-Kraftübertragung. Ergebnis: 1: 2.5.

Die Fotos[7] der Abbildung 8 zeigen die Wasserflasche kurz vor der Entkorkung. Zur genauen Dosierung haben wir einem gelben Eimer mittels Gießkanne schluckweise Wasser zugefügt. Pausen wurden eingelegt, um dem System die Chance zur Anpassung an die jeweils neue Gleichgewichtslage zu geben. Endlich, bei 17.5 kg, sind die Kiste voller Wasserflaschen (10kg) und der gelbe Eimer (7.5kg) zu Boden gefallen. Die Flasche war entkorkt.

Abb. 8: In eine Werkbank locker von unten eingefügte Wasserflasche kurz vor der Entkorkung. Man beachte den mit 50 l Wasser gefüllten Mülleimer (plus 20 kg Backsteine im Hintergrund) als Gegengewicht.

Das Ergebnis lautet:

$$(17.5\,\mathrm{kg}\cdot 2.5)\cdot 9.80665\,\mathrm{m/s^2} = 429\,\mathrm{N}\,.$$

Dies bedeutet volle Übereinstimmung mit der zuvor berechneten Schubkraft und auch eine Bestätigung der Tatsache, dass wir Schub- und Zugkraft gleichsetzen können.

Lindau Bodensee, April 2005

Anschriften der Verfasser
Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26
beide: D-88131 Lindau Bodensee
Strutz_Christian@t-online.de
Angelo Rupflin, Schüler des Valentin-Haider-Gymnasiums Lindau Bodensee, Felsgässele 5,
a.rupflin@t-online.de

Höhenflug einer Wasserrakete
Christian Strutz und Angelo Rupflin
Wir beschreiben die Ausstattung sowie den Start, die Antriebs- und Leerlaufphase einer Wasserrakete aus Polyethylen-Terephthalat (PET) sowie die Auswertung von drei Bildern eines Video Clips. Ein Zug-Experiment dient zur Überprüfung der berechneten Schubkraft.

---

[1] Wir danken Herrn Rainer Kraupner für den Tipp, einen Korken mit Fahrradventil zu verwenden. Sein Kopf ist Peilpunkt für unsere erste Geschwindigkeits-Schätzung.
[2] Robert Rouens 2004: Burst testing with Berggren & Rouens. http://members.aol.com/powerdeployment/page1.html
[3] http://www.psrc.usm.edu/macrog/pet.htm
[4] Kamera: Hersteller: Pentavision (Pearl); Modell: PMC-3000i; Objektiv / Fokus: 8,7 mm / 3,0; Photoauflösung: 2048*1536 Pixel; Videoauflösung: 320*240 Pixel; Video Clip Bildfrequenz: 41 frames per 4 seconds.
[5] Randy Culp 2004: Rocket Equations. http://my.execpc.com/~culp/rockets/rckt_eqn.html
[6] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig 1999: Taschenbuch der Mathematik. S.423, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M., Thun.
[7] Herrn Rainer Lübbe haben wir die fotografische Dokumentation dieses Ereignisses zu verdanken.