

# Die Venus-Phasen

## Ein elementar-geometrisches Modell

Christian Strutz

### Beweis des heliozentrischen Systems

Nur selten haben wir die Gelegenheit, uns mit einfachsten Mitteln das zu erklären was wir sehen. Diese Gelegenheit bietet uns der Planet Venus. Bis vor kurzem<sup>1</sup> hatte ich geglaubt, die Venus sei ein helles Pünktchen am Himmel und erschiene, wenn vergrößert, als runde Scheibe wie die Sterne. Dann aber erfuhr ich, dass NIKOLAUS KOPERNIKUS, bewaffnet mit einem Fernrohr, die Phasen der Venus, also ihr veränderliches Auftreten von einer kleinen vollen Scheibe bis zur erheblich größeren feinen Sichel, entdeckte und als Beweis für seine Theorie des heliozentrischen Systems benützte (Abb. 1). GALILEO GALILEI<sup>2</sup> und ISAAC NEWTON<sup>3</sup> schlossen sich dieser Beweisführung an.

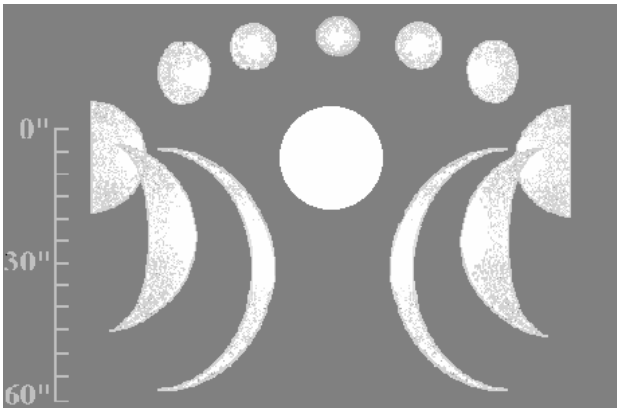


Abb. 1: Größenverhältnisse der Venus-Phasen

### Das Modell

Versetzen wir uns also in die Zeit vor den Kepler-Ellipsen: Wenn sich, von der Erde aus gesehen, die Venus auf einer fast kreisförmigen Umlaufbahn verhält wie eine von einem Zentralkörper beleuchtete Kugel, dann muss dieser Zentralkörper die Sonne sein. Als innerer Planet hat die Venus einen geringeren Abstand zur Sonne als die Erde. Von dieser aus betrachten wir also den Umlauf der Venus um die Sonne, wobei sie, wegen ihrer größeren Nähe und deshalb größeren Geschwindigkeit, der Erde ständig davonläuft. Da sie sich aber auf einer Kreisbahn befindet, nähert sie sich, ausgehend vom Punkt der weitesten Entfernung, der Erde mit abnehmender Phase, überholt sie im geringsten Abstand und entfernt sich dann wieder von der Erde mit zunehmender Phase (Abb. 2).

Obwohl die Erde ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn um die Sonne rotiert, können wir, um klarer zu sehen, die Verbindungslinie Erde-Sonne als rotierende x-Achse starr sein lassen und nur die Relativ-Bewegung der Venus in Betracht ziehen. Sowohl die Neigung der Erdbahn zur Ebene des Himmelsäquators (Ekliptik) als auch die Neigung der Venusbahn zur Erdbahn lassen wir

außer Acht. Wegen des Fehlens der dritten Dimension fehlt im Modell die Schiefele der Figuren.

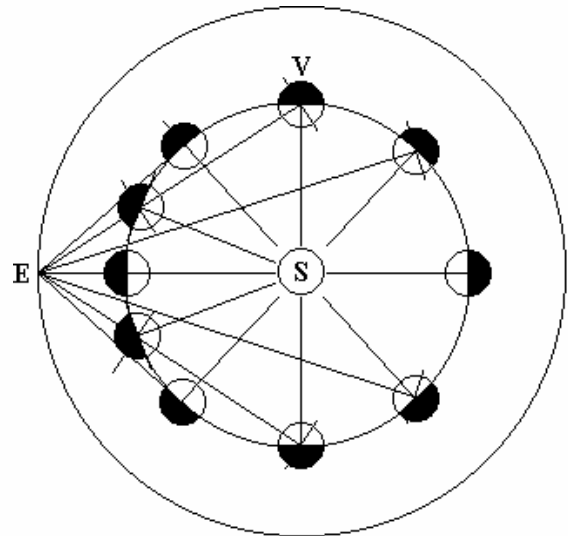


Abb. 2: Positionen der Venus V im Verhältnis zu Sonne S und Erde E

### Geometrische Grundlagen

Die Abbildung 2 zeigt, wie die Sonne ständig die ihr zugewandte Hälfte der Venus-Kugel beleuchtet, während dies, von uns aus gesehen, nur in der von uns aus weitesten Entfernung - der oberen Konjunktion - der Fall ist. Klar ist auch, dass uns die Venus-Scheibe in dieser maximalen Entfernung mit knapp 10 Bogensekunden am kleinsten erscheint. Von dieser Konstellation ab nimmt für uns der Anteil der beleuchteten Kreisfläche ab, während sich die scheinbare Venus-Scheibe ständig vergrößert.

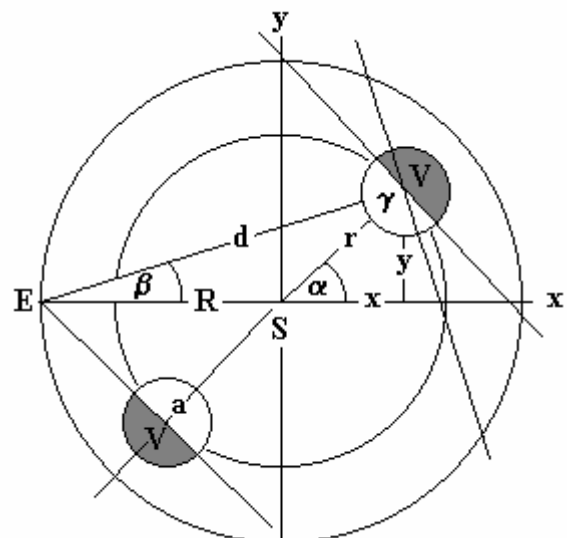


Abb. 3: Definitionen des Richtungswinkels  $\beta$ , des Phasenwinkels  $\gamma$  und der Entfernung Erde-Venus  $d$

Als Halb-Venus sehen wir den Planeten, wenn unsere Blickrichtung  $\beta$  tangential die Venus-Bahn berührt. Diese Konstellation wird als maximale Elongation bezeichnet und bedeutet für uns, dass sich die Venus nur um diesen Winkel östlich als Abendstern oder westlich von der Sonne als Morgenstern entfernen kann. Von nun an wird die Venus immer sichelförmiger und größer bis sie in der unteren Konjunktion der Erde nur noch ihre schwarze Kehrseite zuwendet, die am 8. Juni 2004 als ein schwarzes über die Sonnenfläche wanderndes Scheibchen während des Venus-Durchgangs sichtbar sein wird. Die Abbildung 3 liefert die geometrischen Details. Die Entfernung Sonne-Venus sei  $r$ , die mittlere Entfernung Sonne-Erde  $R$ . Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$d = \sqrt{y^2 + (R + x)^2}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y}{R + x}\right)$$

$$\gamma = 180^\circ + \alpha - \beta$$

Das Licht-und-Schatten-Spiel einer einseitig beleuchteten Kugel in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Betrachter, Kugel und Lichtquelle ergibt die Phase: Der kreisrunde, scharf gegen den Himmel abgegrenzte Teil der Kugel ist dem Licht zugewandt. Die unschärfere Grenze zwischen Licht und Schatten auf der Kugel entspricht der Kontur einer halben Ellipse (Abb. 4).

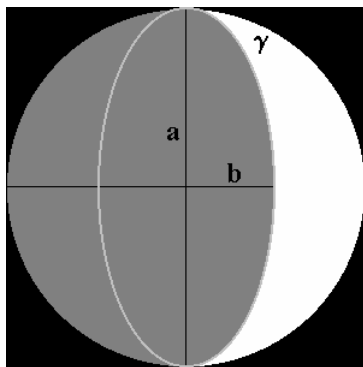


Abb. 4: Prinzip der Phase einer einseitig beleuchteten Kugel mit Radius **a** und Ellipsen-Halbachse **b**

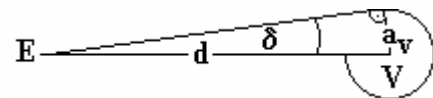
Betrachten wir nun die scheinbare Venusfläche als Scheibe, so ergibt sich die Phase  $P$  in Prozent aus dem beleuchteten Anteil der Kreisfläche nach der Formel

$$P\% = \frac{\gamma}{180^\circ} \cdot 100.$$

Die Strecke  $a$  ist gleichzeitig Kreisradius und große Halbachse der Kontur-Ellipse. Weiterhin ist die beschienene scheinbare Fläche  $A_p$  der Venus:

$$A_p = a^2 \cdot \pi \cdot P.$$

Der kleinen Detailzeichnung gemäß ist die scheinbare Größe - gleichbedeutend mit dem Scheibchendurchmesser  $S_d$  der Venus - gleich dem doppelten Winkel  $\delta$ :



$$\delta = \arctan\left(\frac{a_v}{d}\right)$$

in Bogensekunden:

$$S_d = 2a = 2 \cdot \arctan\left(\frac{a_v}{d}\right) \cdot 3600 \cdot \frac{180}{\pi}.$$

### Ergebnisse der Tabellenkalkulation

Ausgehend von der oberen Konjunktion mit  $\alpha=0^\circ$  bewegt sich unsere Modell-Venus, deren Koordinaten mit  $x$  und  $y$  bezeichnet sind, dem Uhrzeigersinn entgegen. Als mittlere Entfernung Erde-Sonne, gleich der Astronomischen Einheit AU, wurden  $R=149\,597\,870$  km, für die Entfernung Venus-Sonne  $r=108\,200\,000$  km und für den Radius der Venus  $a_v=6051.4$  km eingegeben. Weder die Ellipsenform der Umlaufbahnen von Erde und Venus noch die Schiefe der Ekliptik der Umlaufbahnen habe ich in diesem Modell berücksichtigt.

Die Abb. 5 zeigt den Verlauf der Entfernung  $d$  und des Winkels  $\beta$  im Zusammenspiel der Koordinaten  $x$  und  $y$ .

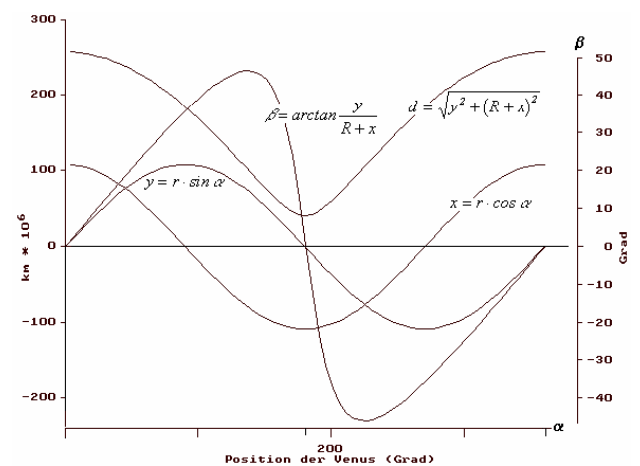


Abb. 4: Entfernung **d** der Venus von der Erde in Abhängigkeit von ihren Koordinaten

Wegen Modellcharakters der Vorgaben stimmen die berechneten Werte natürlich nicht mit den genauen Werten der Fachliteratur überein. Wichtig aber ist der Verlauf der Kurven: So sehen wir, dass der Richtungswinkel  $\beta$  sein Maximum bei etwa  $46^\circ$  hat, bei

$\alpha=180^\circ$  eine Nullstelle durchläuft und mit negativem Vorzeichen punktsymmetrisch weiterläuft. Erwartungsgemäß erreicht auch der Abstand  $d$  bei  $\alpha=180^\circ$  sein Minimum und verläuft beinahe parallel zur  $x$ -Koordinate der Venus.

Die Abb. 6 zeigt, wie sich die scheinbare Größe und die Phase der Venus während eines Umlaufs um die Sonne gegenläufig ändern.

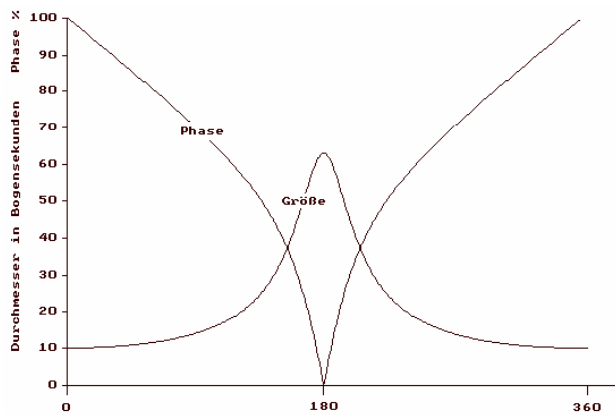


Abb. 6: Verlauf der scheinbaren Größe und Phase der Venus

Wie erwartet, erfährt auch die scheinbare Fläche in der unteren Konjunktion einen plötzlichen Einbruch. Dadurch entsteht eine zweigipflige Funktion (Abb. 7).

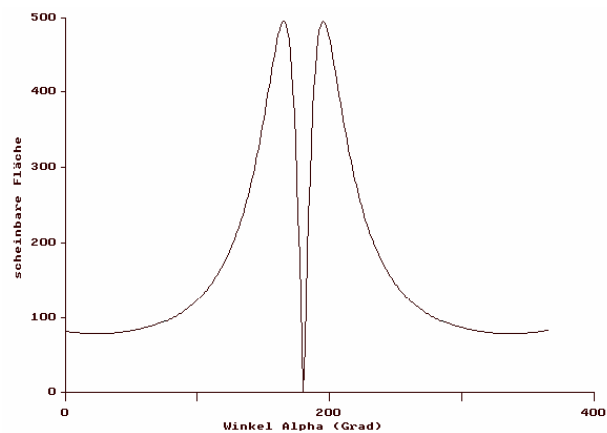


Abb. 7: Verlauf der scheinbaren Fläche

Bei welcher Phase ist, dem Modell nach, die scheinbare Venus-Fläche am größten? Der Abb. 8 nach befindet sich das Maximum der scheinbaren Venus-Fläche bei 26%.

Wie verhält es sich aber mit der Helligkeit, die, ähnlich der beleuchteten Fläche, zweigipflig verläuft? Hier müssen wir berücksichtigen, dass die Helligkeit dem Entfernungsgesetz unterworfen ist. Das bedeutet, dass wir die von der Sonne beleuchtete Fläche mit  $1/(4\pi d^2)$ , dem reziproken Wert der Kugeloberfläche im Abstand der variablen Entfernung  $d$  zwischen Erde und Venus multiplizieren müssen, um auch bei der Helligkeit ein Maximum in Abhängigkeit von der Phase ermitteln zu können. Die gleiche Höhe wie das Flächen-Maximum

erreiche ich, wenn ich den berechneten „Helligkeitswert“ mit der Konstanten  $C=7.55 \cdot 10^{15}$  multipliziere. Ein erstaunliches Ergebnis zeigt sich in der Abb. 8:

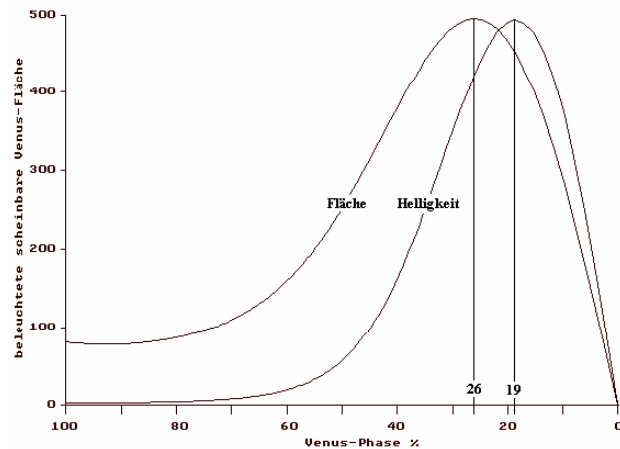


Abb. 8: Maxima der beleuchteten Fläche und der Helligkeit in Abhängigkeit von der Venus-Phase.

Die Venus erreicht, dieser Modellrechnung nach, ihre größte Helligkeit nicht mit dem Maximum an beleuchteter Fläche bei 26% sondern mit einer erheblich feineren Sichel der Phase 19% in größerer Nähe. Beide Maxima sind also, zumindest dem Modell nach, nicht identisch.

Eine Erklärung für dieses Phänomen ist vielleicht auch der S-förmige Verlauf der Beziehung zwischen der Venus-Phase und ihrer scheinbaren Größe (Abb. 9).

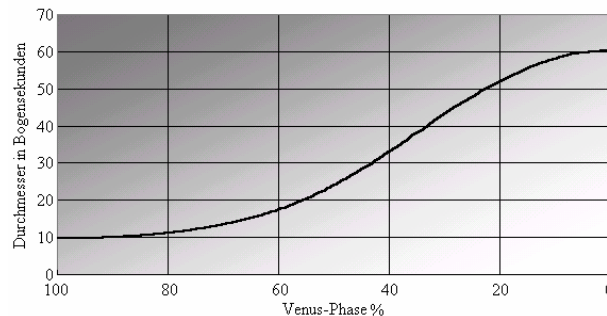


Abb. 9: Beziehung zwischen der Venus-Phase und ihrer scheinbaren Größe

### Schlussfolgerung

So kann mir die voraussetzungslos-naive - elementare - Vorgehensweise helfen, das was ich sehe zu verstehen.

<sup>1</sup> Bis zur Lektüre des Artikels ‘ „Planetarische Analysis“ - Dem Helligkeitsverhalten der Venus auf der Spur’ von Arne Rüter. Nachr.Olbers-Ges. 198, Juli 2002, S.16.

<sup>2</sup> Enrico Bellone: Galilei: Leben und Werk eines unruhigen Geistes. Spektrum der Wissenschaft Biographien. 1998, S.61.

<sup>3</sup> Dana Densmore: Newton’s Principia: the central argument. transl. & diagrams by William H. Donahue. S. 259. Green Lion Press, Santa Fe New Mexico 1996.