Über die Eigenschaften der Zahlen Φ (Phi) und ϕ (phi)

Christian Strutz[1]

Numerische Näherung

Das Ganze sei zum größeren Teil wie der größere zum kleineren Teil. Mit *1* als dem "Ganzen" und *x* als dem größeren Teil heißt das:

(1) $$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}; \qquad x^2 = 1 - x.$$

Demnach soll es eine Zahl *x* geben, deren Eigenschaft ganz eigentümlich ist: Wenn ich sie von Eins abziehe, erhalte ich ihr Quadrat. Hinzuzählen und Abziehen scheinen da mit Teilen und Malnehmen durcheinandergebracht!

Die Gleichung (1) können wir als quadratische Funktion auffassen.

(1a) $$y = x^2 + x - 1.$$

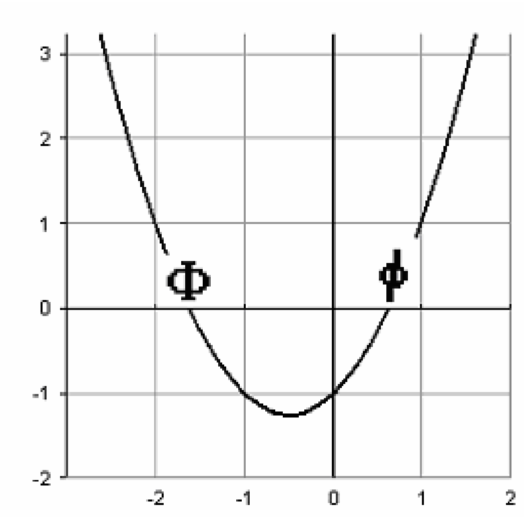

Abb 1: Nullstellen der Gleichung (1a)

Mit $y = 0$ erhalten wir deren Nullstellen, die Lösungen der Gleichung (1a).

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x_1 = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right| = \phi \approx 0.61803..$$

$$x_2 = \left|-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\right| = \Phi \approx 1.61803..$$

In der Tat ist

(2) $$\frac{1}{\phi} = \phi + 1 = \Phi \approx 1.61803..$$

mit exakt der gleichen Zahlensequenz nach dem Komma bei Φ wie bei ϕ und

(3) $$1 - \phi = \phi^2 \approx 0.381966\ldots$$

Wenn wir unter "rationalen" Zahlen solche verstehen, die mit einem Bruch (Bruch = ratio = λογος) aus natürlichen Zahlen ausdrückbar sind, so sind ϕ und Φ nach Richter und Scholz[2] die irrationalsten aller Zahlen. Denn die Näherung für ϕ besteht aus einem unendlichen Bruch mit lauter Einsen, die Näherung für Φ aus einer unendlichen Wurzel, ebenfalls nur mit Einsen[3]:

$$\phi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}; \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ddots}}}\ .$$

Weder die Kreiszahl π noch das Eulersche *e* verfügt über solch eine Ausschließlichkeit gegenüber anderen Zahlen..

Anwendungen der Gleichungen (1) bis (3) lassen die folgenden, arithmetisch sehr eigentümlichen Beziehungen zu Tage treten:

(3a) $\phi^2 + \phi = 1;$

(4) $2 - \phi = 1 + \phi^2;$

(5) $\phi \cdot \Phi = 1;$

(6) $\Phi + 1 = \Phi^2;$

(7a) $\frac{\Phi}{\phi} = \Phi^2;$

(7b) $\frac{\phi}{\Phi} = \phi^2;$

(8) $\Phi^2 + \phi^2 = 3.$

Nachdem uns nun die Quadrate von ϕ und Φ und deren Eigenschaften begegnet sind, wollen wir uns mit den weiteren Potenzen von Φ beschäftigen:

$$
\begin{aligned}
\Phi^0 &= 0\cdot\Phi+1 = 1.0000000000\\
\Phi^1 &= 1\cdot\Phi+0 = 1.6180339887\\
\Phi^2 &= 1\cdot\Phi+1 = 2.6180339887\\
\Phi^3 &= 2\cdot\Phi+1 = 4.2360679775\\
\Phi^4 &= 3\cdot\Phi+2 = 6.8541019662\\
\Phi^5 &= 5\cdot\Phi+3 = 11.0901699437\\
\Phi^6 &= 8\cdot\Phi+5 = 17.9442719100\\
\Phi^7 &= 13\cdot\Phi+8 = 29.0344418537\\
\Phi^8 &= 21\cdot\Phi+13 = 46.9787137637\\
\Phi^9 &= 34\cdot\Phi+21 = 76.0131556175\\
\Phi^{10} &= 55\cdot\Phi+34 = 122.991869381\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tab. 1: Positive Potenzen von Φ,
Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen

Auffallend ist, dass sich jede positive Potenz von Φ in die Komponenten $F_n\cdot\Phi+F_{n-1}$ zerlegen läßt, auch die Null-Potenz, die ja bei allen Zahlen gleich *1* sein muss.
Mit *F* sind die Fibonacci-Zahlen des Leonardo da Pisa[4] gemeint, d.h. 1,1,2,3,5,8..., wobei die Summe der zwei Vorgänger die nächste Zahl ergibt.

n	F	$\frac{F_{n+1}}{F_n}\to\Phi$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}\to\phi$
1	1		
2	1	1.000000	1.000000
3	2	2.000000	0.500000
4	3	1.500000	0.666667
5	5	1.666667	0.600000
6	8	1.600000	0.625000
7	13	1.625000	0.615385
8	21	1.615385	0.619048
9	34	1.619048	0.617647
10	55	1.617647	0.618182
⋮	⋮	⋮	⋮
18	2584	1.618034	0.618034
19	4181	1.618034	0.618034
20	6765	1.618034	0.618034

Tab. 2: Approximation von ϕ und Φ
durch Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen

Die Quotienten $F_n/F_{n-1}\to\Phi$ und $F_{n-1}/F_n\to\phi$ bedeuten, dass bei wachsender Anzahl der Schritte *n* und Teilung der größeren durch die nächst kleinere Fibonacci-Zahl eine immer genauere Näherung von Φ erfolgt, und dass wir bei Teilung der kleineren durch die nächst größere Fibonacci-Zahl immer näher an ϕ herankommen. Unter Anwendung der bisher gezeigten Rechenregeln kommen wir, umgekehrt, auf folgende äquivalente Formeln zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen aus Φ und ϕ:

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{\left[\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]^n-\left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]^n}{\sqrt{5}}\\
&= \frac{\Phi^n-(-\phi)^n}{\sqrt{5}}\\
&= \frac{\Phi^n-(1-\Phi)^n}{\sqrt{5}}\\
&= \frac{\Phi^n-(-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Das Fehlen jeglicher Stellen nach dem Komma läßt keinen Zweifel über die Richtigkeit der Ergebnisse aufkommen.
Weitaus ungenauer ist die Schätzung der Fibonacci-Zahen mittels linearer Regression:

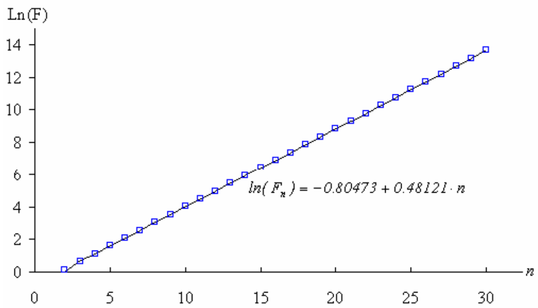

Abb. 2: Beziehung zwischen n Schritten und dem Natürlichen Logarithmus der entsprechenden Fibonacci-Zahl

Erst wenn wir die Fibonacci-Zahlen in ihren Natürlichen Logarithmus transformieren, stellt sich komplette Linearität in der Beziehung zwischen *n* und *ln(F)* ein:

$$\ln(F_n) = -0.80473+\ln(\Phi)\cdot n\,. \tag{10a}$$

Mit

(10b) $F_n = 0.447206 \cdot \exp[\ln(\Phi) \cdot n]$

erhalten wir in guter Näherung die gesuchte Fibonacci-Zahl.

Geometrische Definitionen

Nach Euklid[5] bewirkt die "Teilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnis" oder der Goldene Schnitt[6] der Strecke $AB = 1$ im Punkt H, dass das Quadrat über $AH = \phi$ dem Rechteck mit den Seitenlängen 1 und $1-\phi$ flächengleich ist:

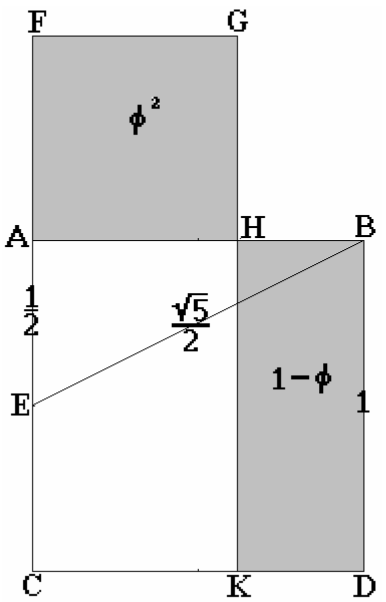

Abb. 3: Bestimmung von ϕ und Φ nach Euklid II,11

$$AB = AC = CD = HK = BD = 1;$$

$$EB = EF = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$AF = AH = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \phi.$$

Gewöhnlich finden wir die Zahlen ϕ und Φ mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks der Grundlinie $AB = 1$ und der Höhe $BC = ½$.

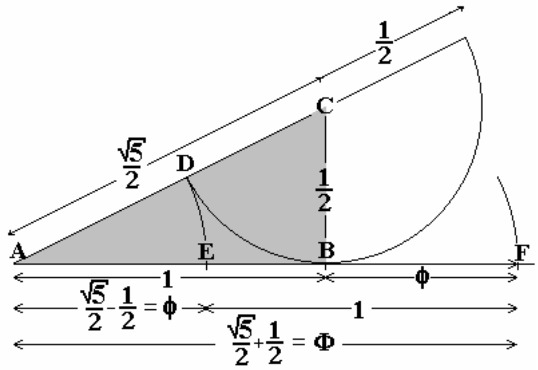

Abb. 4: Standard-Bestimmung von ϕ und Φ

Nach dem pythagoräischen Theorem hat die Verbindungslinie AC die Länge von

$$AC = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vermindern wir AC um ½ , so kommen wir auf ϕ:

$$AD = AE = BF = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) = \phi \approx 0.61803..$$

Verlängern wir die Strecke $AB = 1$ um das soeben gewonnene ϕ, landen wir auf dem Punkt F, der $\phi + 1 = \Phi$, also *1.618* Längen-Einheiten von A entfernt ist.

Auch aus dem Einheitskreis bzw. einem Sechseck können wir ϕ und Φ entstehen lassen:

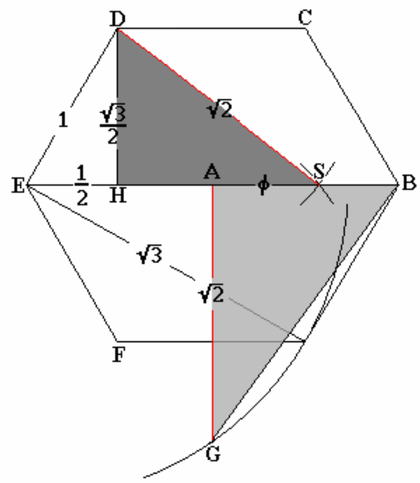

Abb. 5: Bestimmung von ϕ aus dem Einheitskreis bzw. Sechseck: √2 entstammt dem Dreieck ABG

$AB = BC = CD = DE = EA = EF = 1$;

$HA = HE = \frac{1}{2}$;

$DF = EG = BG = \sqrt{3}$;

$DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$AG = DS = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$.

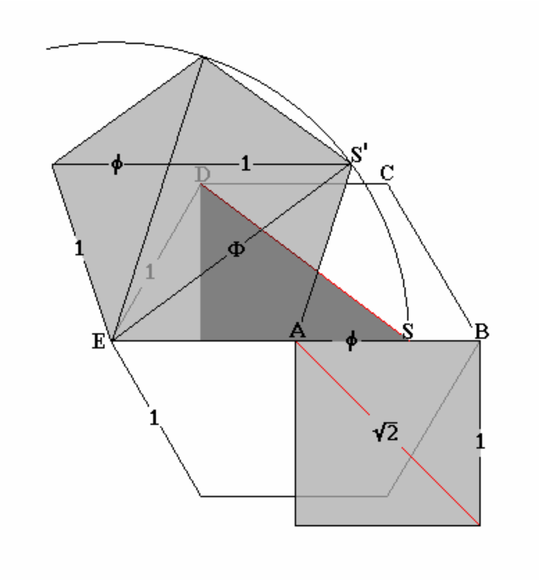

Abb. 6: Bestimmung von ϕ und Φaus einem Sechseck und Konstruktion eines Fünfecks: √2 ist die Diagonale des Quadrats unter AB

Natürlich können wir die für die Konstruktion notwendige $\sqrt{2}$ dem Quadrat unter *AB* als Diagonale entnehmen (Abb. 6):

$$HS = \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$AS = HS - HA = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \phi;$$

$$ES = ES^{\mid} = 1 + \phi = \Phi.$$

Erst im Jahr 1982 stellte der Künstler und Amateur-Mathematiker George Odom[7] die Behauptung auf, dass auch die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks die zum Umkreis verlängerte Mittelparallele im Goldenen Schnitt teile:

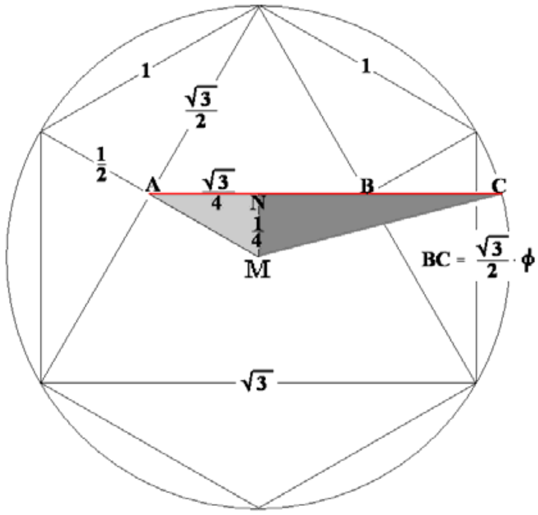

Abb. 7: Bestimmung von ϕ aus einem gleichseitigen Dreieck nach George Odom

Den Beweis liefert die Berechnung der Streckenlängen nach dem pythagoräischen Theorem:

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2};\ AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Phi;$$

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \phi;$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Phi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi;$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \phi} = \frac{1}{\phi} = \Phi. \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Winkelserie 18°, 36°, 54°…

Der Kreis um *B* mit dem Radius ϕ bildet in der Abb. 4 mit dem Kreis um *A* mit dem Radius gleich *1* den Schnittpunkt *G* über der Strecke *AB* (Abb. 8). Damit haben wir das gleichschenklige Dreieck *ABG* mit den Seitenlängen $1, \phi, 1$ gewonnen.Von *G* aus fällen wir das Lot *h* auf die Strecke *AB*. Wie lang ist dieses *h*? Um die Frage zu beantworten, müssen wir die Mittelsenkrechte h_ϕ zwischen *B* und *G*, die gleichzeitig Höhe und Winkelhalbierende des Winkels α ist, konstruieren und ihre Länge bestimmen. Nach Pythagoras gilt:

$$h_\phi^2 = 1 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2$$

$$h_\phi = \frac{\sqrt{\phi + 3}}{2} \approx 0.951056\,.$$

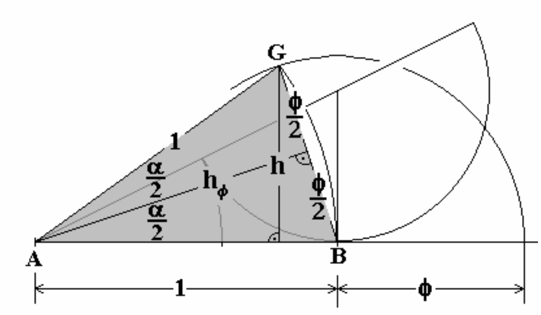

Abb. 8: Bestimmung der Höhen h_ϕ und h des Dreiecks ABG

Gleichzeitig können wir auch den Winkel $\alpha/2$ bestimmen, der mit 18^o erstaunlich "rund" ist:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\phi/2}{1} = \frac{\phi}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 0.587785$$

$$\alpha = arcsin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cdot\frac{360°}{2\pi} = 18°\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\boxed{\phi = 2\cdot\sin(18°)}.$$

Mit der Information über die Grundlinie ϕ und die Höhe h_ϕ haben wir die Bestandteile für die Flächenberechnung des Dreicks *ABG* in der Hand:

$$F_\Delta = \frac{\phi}{2}\cdot h_\phi = \frac{\sqrt{2-\phi}}{4} \approx 0.29892\,.$$

Zur Länge von *h* kommen wir schließlich, wenn wir *AB = 1* als Grundlinie auffassen und die Fläche des Dreiecks *ABG* durch ½ mal *1* teilen:

$$h = \frac{F_\Delta}{\frac{1}{2}\cdot 1} = 2F_\Delta = \frac{\sqrt{2-\phi}}{2} \approx 0.587785\,.$$

Das frisch gewonnene *h* hilft uns, den Winkel α direkt zu bestimmen:

$$\sin(\alpha) = h = \frac{\sqrt{2-\phi}}{2}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2-\phi}}{2}\right)\cdot\frac{360°}{2\pi} = 36°\,.$$

Wieder erhalten wir mit *36* ^{o} ein rundes Ergebnis.
Wo befindet sich der Fußpunkt von *h*? Bis jetzt wissen wir nur, dass er sich zwischen ϕ und *1* befindet. Der Abstand zwischen Fußpunkt und *1* sei als *x* bezeichnet. Nach Pythagoras gilt:

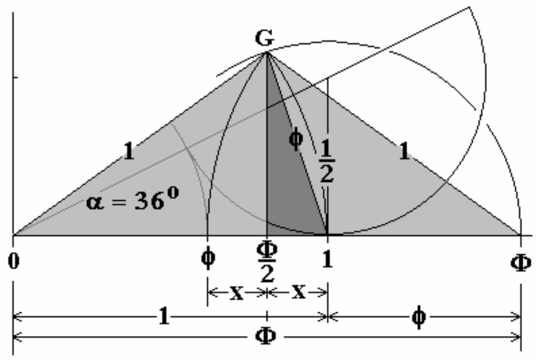

Abb. 9: Bestimmung von Φ/2

$$x = \sqrt{\phi^2 - h^2} = \frac{\sqrt{2-3\phi}}{2} \approx 0.190983..$$

$$x + \phi = 1 - x = \frac{\Phi}{2} \approx 0.809017..$$

Es stellt sich heraus, dass der Fußpunkt des Lotes *h* die Strecke *AF* = Φ in zwei gleiche Teile teilt. Diese Kenntnis ermöglicht es uns, den Winkel α auch mit Hilfe des Kosinus zu berechnen:

$$cos(\alpha) = \frac{\frac{\Phi}{2}}{1} = \frac{\Phi}{2}\,;$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{\Phi}{2}\right)\cdot\frac{360}{2\pi} = 36°$$

Damit haben wir eine weitere Definition von Φ:

$$\boxed{\Phi = 2\cdot cos(36°)}.$$

Phi, phi und das regelmäßige Fünfeck

Wir sehen diese Winkel im Zusammenhang mit dem regulären Fünfeck, dessen Diagonalen einander im Goldenen Schnitt teilen und dessen Verhältnis zwischen Diagonale und Seitenlänge gleich Φ ist. Die Abb. 6 zeigt die Anwendung dieses Prinzips, Abb. 10 die Eigenschaften.

.

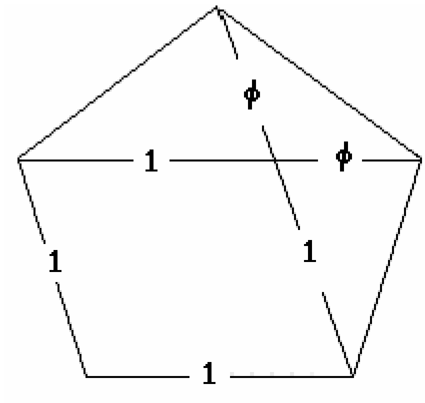

Abb. 10: Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks der Seitenlänge 1

Das rechtwinklige Dreieck *AΦ/2G* mit den Winkeln *36 °,90 °,54 °* eröffnet uns gleich zwei Möglichkeiten, ein regelmäßges Fünfeck zu konstruieren (Abb. 11):

Entweder spiegeln wir das Dreieck vertikal an der Grundlinie *AΦ/2* und erhalten mit *A* den Mittelpunkt des In- und Umkreises, die Seitenlänge $\sqrt{2-\phi}$ sowie den Zentriwinkel *72°*.

Oder wir spiegeln das Dreieck horizontal und erhalten mit *AFG* drei Punkte des Fünfecks der Seitenlänge *1*.

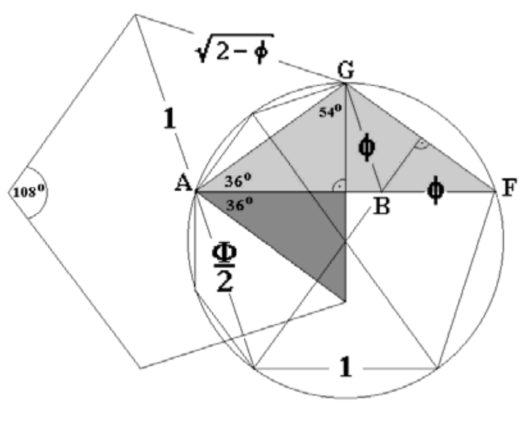

Abb. 11: Konstruktionn von Fünfecken mit Seitenlänge 1 und Seitenlänge $\sqrt{2-\phi}$

Bei diesem Fünfeck beträgt der Umkreisradius

$$a = \frac{1}{\sqrt{2-\phi}} = \sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{5}}} \approx 0.850650\,.$$

Mit analogen Proportionen erhalten wir aus dem Fünfeck der Seitenlänge $\sqrt{2-\phi}$ den Inkreisradius *b* für das Fünfeck mit der Seitenlänge 1:

$$\frac{1}{\frac{\Phi}{2}} = \frac{a}{b}; \qquad b = \frac{a \cdot \Phi}{2};$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\phi}{2-\phi}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}} \approx 0.688191\,.$$

Der Mittelpunkt des In- und Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten.

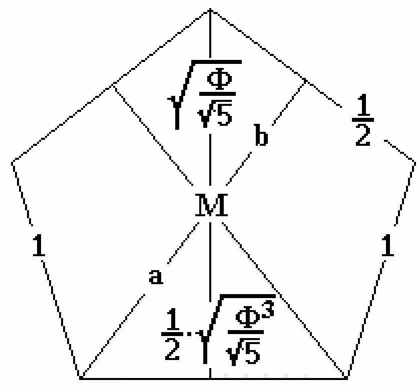

Abb. 12: In- und Umkreisradius des regelmäßidgen Fünfecks

Die Länge dieser Mittelsenkrechten, gleichbedeutend mit der Höhe *h* des Fünfecks, ist die Summe der beiden Radien *a* und *b*.

$$h = a + b = \sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{5}}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}} \approx 1.53884\,.$$

Zum gleichen Ergebnis kommen wir mit Pythagoras:

$$h = \sqrt{\Phi^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{4\Phi^2 - 1}}{2} \approx 1.53884.$$

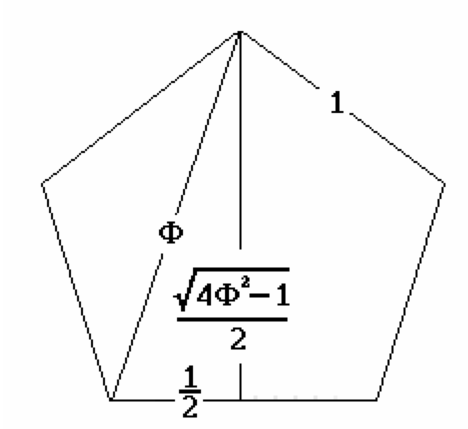

Abb. 13: Berechnung der Mittelsenkrechten und Höhe des regelmäßidgen Fünfecks

Wir sehen, dass das Rechnen mit Φ und ϕ die Durchschaubarkeit des Rechengangs erheblich erhöht und den Aufwand verringert, wenn wir die für Φ und ϕ geltenden Regeln beachten.

Das Dodekaeder aus zwölf Fünfecken

Drastischer noch zeigt sich die Rechenerleichterung beim Berechnen der Maße des Pentagon-Dodekaeders[8]:

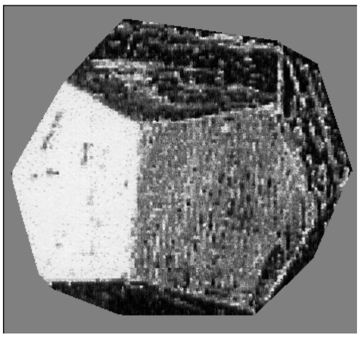

Abb. 14: Pyrit (FeS_2)-Dodekaeder aus zwölf Fünfecken

Kippen wir den Körper in eine Position, in der das Dodekaeder im Profil einer Tonne ähnlich sieht, haben wir die Serie 1,h,h,1,h,h wie in der Abb. 15 vor uns. So können wir die Radien R und r der Um- und Inkugeln sowie die Höhe und Breite der "Tonne" nach Pythagoras berechnen. Wenn uns bei der Berechnung des Radius r der Inkugel der Term $5\Phi+3$ begegnet, können wir diesen nach Tab. 1 getrost in Φ^5 umwandeln:

(11)

$$r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5\Phi+3}{2\Phi-1}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\Phi^5}{\sqrt{5}}} \approx 1.113516.$$

Auffallend ist, dass die Länge des Umkugelradius R

(12) $$R = \Phi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.401258$$

beträgt, eine Größe, die wir schon vom Goldenen Schnitt der zum Umkreis verlängerten Mittelparallele des gleichseitigen Dreiecks ($AC = \sqrt{3}/2\cdot\Phi$; Abb. 7) kennen.

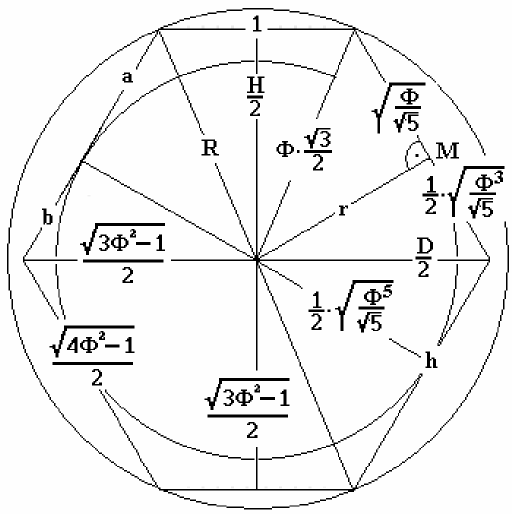

Abb. 15 Seitenansicht des Dodekaeders mit Seitenlängen sowie Radien der Um- und Inkugeln

Im Dodekaeder besteht demnach eine Verbindung zwischen regulärem Fünfeck und regulärem Sechseck über das gleichseitige Dreieck. Wahrscheinlich deshalb verhalten sich Pentagon-Dodeka- und Ikosaeder (zwanzig gleichseitige Dreiecke) dual zueinander.

Danksagung

Ich danke den Herren Josef Rung, Reinhard Pflug, Rainer Kraupner, Hans Joachim Scholz und Ron Knott für Kritik, Korrektur und aufmunternde Worte.

Lindau, März 2005

[1] Dr. Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau, Strutz_Christian@t-online.de

[2] Peter H. Richter und Hans-Joachim Scholz: Der Goldene Schnitt in der Natur. Harmonische Proportionen und die Evolution. In: Bernd-Olaf Küppers (Hrsg.): Ordnung aus dem Chaos. Prinzipien der Selbstorganisation und Evolution des Lebens. 2. Aufl. Piper, München 1988.

[3] Ein aktueller Berechnungs-Rekord weist 1.5 Milliarden Stellen nach dem Komma aus. Aus R. Knott: The Golden section ratio: Phi. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi.html

[4] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fibonacci.html

[5] Euklid: Elemente Buch II, prop.11Vol.I, S.153; Buch VI prop.30 Vol.II, S.171(hier erscheint zum ersten Mal "Teilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnis"). I.L.Heiberg ed.,Teubner, Leipzig 1883-84.

[6] Diese Bezeichnung als Synonym für die "harmonische" oder "stetige" oder "göttliche" Teilung hatte der Mathematiker Martin Ohm (Bruder des Physikers Georg Simon Ohm) 1835 geprägt.

[7] George Odom, Problemstellung:"Let A and B be the midpoints of the sides EF and ED of an equilateral triangle DEF. Extend AB to meet the circumcircle of DEF at C. Show that B divides AC according to the golden section." American Mathematical Monthly (AMM) **90**, p 482 (1983), Lösung: AMM **93**, p 572 (1986).

[8] Es handelt sich hierbei um den fünften platonischen Körper, dem kein "Element" sondern das Weltall zugeordnet ist. Platon: Timaios, S. 313. Karlheinz Hülser (Hrsg.), Insel Vlg. 1991.