Nullstellen mit Tabellenkalkulation nach dem *Newton*schen Näherungsverfahren

Christian Strutz

Einleitung

Fast unbemerkt hat in den letzten Jahren eine Revolution der Computertechnik stattgefunden. War es noch vor zehn Jahren ein Privileg, einen Personal Computer (PC) zu besitzen, der mit einer Festplatte mit 20-30 Megabyte Speicherkapazität ausgestattet war, so ist es heute nichts besonderes mehr, einen hochfrequenten PC mit mehreren Gigabyte auf der Festplatte zu haben. In vielen Büros und Haushalten befinden sich deshalb ungeahnt riesige Computerkapazitäten, die wir für unsere eigene Kreativität nutzen könnten.

Der vorliegende Beitrag will zeigen, dass jeder Anwender eines zeitgemäßen Personal Computers, der über ein Programm mit Tabellenkalkulation verfügt, ohne Programmier- und Zeitaufwand mit höchster Genauigkeit das *Newton*sche Verfahren der Nullstellen-Approximation einsetzen kann, wie dies früher nur den Rechenzentren vorbehalten war.

Somit ist es jedem, besonders aber Studenten der Kollegstufe möglich, ein durchschaubares System einer automatisierten Kurvendiskussion höherer Polynome selbst zu entwickeln. Denn wichtiger als das Ergebnis ist für den denkenden Menschen der Weg dorthin.

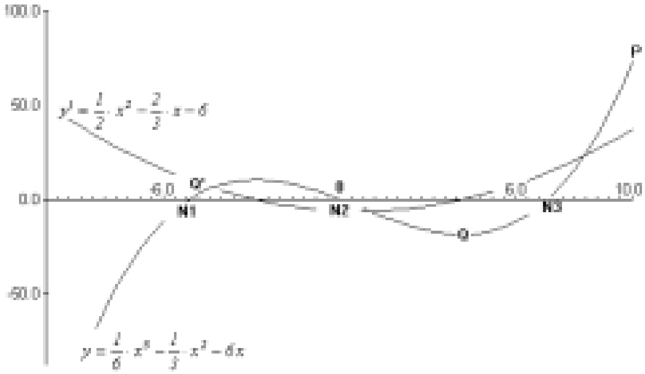
Das *Newton*sche Verfahren der Nullstellen-Approximation

Für Lösungen, d.h. Wurzeln oder Nullstellen, von Gleichungen höheren Grades als des dritten kommt nach *Kühlein* (1942) zunächst nur das zeichnerische Verfahren, ausgehend von einer graphischen Darstellung einer Funktion, in Betracht. Wegen der geringen Genauigkeit von Zeichnungen ist es aber notwendig, die aus dem Graph abgelesenen Werte der Nullstellen zu korrigieren. Ein sehr wirksames Verfahren hierfür hat, wie es *Kühlein* in seinem Repetitorium beschreibt, *Isaac Newton* entwickelt. Als Beispiel verwenden wir das auch mit einfachen Mitteln zu lösende Polynom 3. Grades

$$y = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2 - 6 \cdot x \;;$$

dessen Graph als Funktion und 1. Ableitung in der Abbildung 1 zu sehen ist.

Abbildung 1
Darstellung eines Polynoms dritten Grades

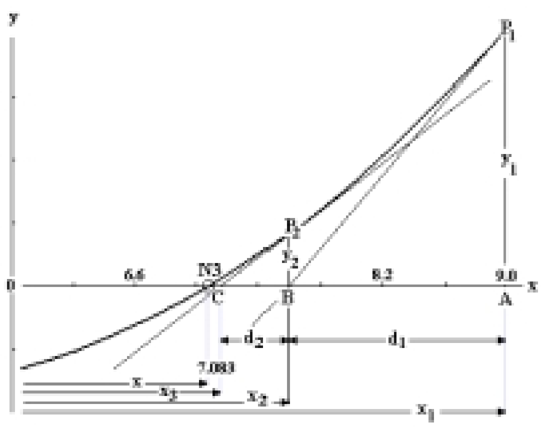


Der Verlauf der Kurve zeigt eine Nullstelle **N1** in der Nähe des Abszissenwertes -6, ein relatives Maximum etwa bei -3, entsprechend einer Nullstelle der ersten Ableitung, eine zweite Nullstelle **N2** im Nullpunkt, ein relatives Minimum zwischen 4 und 5 und eine dritte Nullstelle **N3** in der Nähe von 7. Aus der Wertetabelle entnehmen wir, dass die Ordinate des Punktes P positiv, die des Punktes Q negativ ist. Also befindet sich die Nullstelle **N3** zwischen P und Q.

Zur genaueren Untersuchung der Nullstelle **N3** fertigen wir eine Detailzeichnung an (Abbildung 2).

Abbildung 2
Detail der Funktion

$$y = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2 - 6x$$



In P_1(9; 40.5) zeichnen wir an die Kurve die Tangente P_1B mit der Steigung y' = 28.5.

Die Steigung der Tangente in diesem Punkt finden wir einerseits geometrisch durch das Streckenverhältnis AP_1/AB, andererseits alge-braisch durch die erste Ableitung der Funktion in dem Punkt P_1.

$$y_1^{|} = \frac{AP_1}{AB} = \frac{y_1}{d_1}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach d_1 zeigt, daß der Abstand zwischen den Schnittpunkten A und B gleich dem Quotienten zwischen dem Ordinatenwert und der Steigung in dem Punkt P_1 ist.

$$d_1 = \frac{y_1}{y_1^{|}}$$

Subtrahieren wir die Strecke d_1 von x_1, so erhalten wir den Abszissenwert x_2,

$$x_2 = x_1 - d_1 = x_1 - \frac{y_1}{y_1^{|}}$$

der schon erheblich näher an der gesuchten Nullstelle **N3** liegt als x_1.
Senkrecht über B befindet sich der Schnittpunkt P_2 mit den Koordinaten (x_2;y_2), an den wir wiederum zur weiteren Näherung eine Tangente legen und so weiter...

$$x_3 = x_2 - d_2 = x_1 - \frac{y_2}{y_2^{|}}$$

$$x_4 = x_3 - d_3 = x_3 - \frac{y_3}{y_3^{|}}$$

$$x_5 = x_4 - d_4 = x_4 - \frac{y_4}{y_4^{|}}$$

Diesen wiederholten Vorgang, Iteration genannt, können wir - theoretisch - beliebig lang fortsetzen, je nach dem, auf wie viele Kommastellen genau wir die Nullstelle schätzen wollen.
Wenn wir bedenken, daß die x-Werte der Maxima und Minima ebenfalls Nullstellen der 1. Ableitung und die Wendepunkte Nullstellen der 2. Ableitung sind, so erschließt sich uns mit der *Newton*schen Approximation fast die gesamte Kurvendiskussion einer Gleichung höheren Grades.

Nullstellen-Approximation mittels Tabellenkalkulation

Voraussetzung für diese Serie von Berechnungen ist es, dass, ausgehend von einem Anfangswert X, der sich in der Nähe der Nullstelle befindet, der jeweils folgende Schätzwert mit Hilfe des voraus-gehenden Abszissenwertes berechnet wird.
Für die diese Art der Berechnungen ist die Tabellenkalkulation bestens geeignet, denn wir können mathematische Beziehungen zwischen einzelnen Zellen mit den Koordinaten A,B,C...(Spalte) |1,2,3...(Zeile) herstellen. Das einfachste Beispiel einer Iteration ist die senkrechte Zahlenreihe 1,2,3..., wie wir sie für die Erstellung einer Grafik brauchen.
Zu beachten ist, dass in den Zellen nur die berechneten Werte zu sehen sind. Die Formeln, nach denen diese Werte berechnet werden, sind nur im oberen Display des Bildschirms sichtbar.

	Anzeige	
	Spalte	
Zeile	A	Formel
1	1	
2	2	=A1+1
3	3	=A2+1
4	4	=A3+1

Der Vorteil der Tabellenkalkulation besteht darin, dass, wie in dem gezeigten Beispiel, wir die Formel =A1+1 nur einmal in der Zelle A2 eingeben müssen, um sie dann entlang der Spalte A herunterzukopieren. Der relative Bezug auf die nächstobere Zelle hat zur Folge, dass die Berechnung der Formel erst dann erfolgt, wenn die Berechnung des nächstoberen Wertes abgeschlossen ist. Genau dieses Verfahren brauchen wir für die Approximation von Nullstellen.
Wir erstellen ein Spreadsheet zur iterativen Bestimmung von Nullstellen in Polynomen bis zum 3. Grad, in welchem sich die Koeffizienten A bis D als absolute Referenzen befinden. In den Formeln hat das $-Zeichen vor den Koeffizienten die Wirkung, dass sie beim Herunterkopieren immer gleich bleiben. Für unser Beispiel sieht das so aus:

Exponent		
3	2	1
Koeffizient		
A	B	C
0.1666667	-0.3333333	-6

Die Formel für die Nullstellen dieser Funktion hat dann im PC Programm folgendes Aussehen:

```
=X-($A*X^3+$B*X^2+$C*X+$D)/(3*$A*X^2+2*$B*X+$C)
```

was nichts anderes bedeutet als $x_2 = x_1 - y_1/y'_1$. "X" ist der Name für einen frei zu wählenden Abszissenwert (seed value). In der Folge, entlang der Spalte, bezieht sich aber das X jeweils auf den berechneten Abszissenwert der nächst oberen Zelle. Dabei ist zu bedenken, dass pro Zelle 11 Potenzierungen, 14 Multiplikationen und 16 Additionen abgelaufen sein müssen, bevor der Wert der nächsten, darunter gelegenen Zelle berechnet wird. So können wir beliebig viele Iterationen herunter kopieren. Die Tabelle 1 zeigt einen Ausschnitt dieser Iterationen.

Tabelle 1
Ausschnitt aus der Werte- und Iterationstabelle

X	Y	Y'	Y''	Nullstelle	Extrema
9.0	40.5	28.5	8.3	7.578947368	5.58
8.6	29.8	25.2	7.9	7.129771748	4.38972863
8.2	20.3	22.2	7.5	7.083248357	4.199462399
7.8	12.0	19.2	7.1	7.082762583	4.194338802
7.4	4.9	16.4	6.7	7.08276253	4.194336081
7.0	-1.2	13.8	6.3	7.08276253	4.194336081

Das Beispiel zeigt, dass bei einem seed value X = 9 bereits 5 Iterationen ausreichen, um die x-Werte der Nullstelle **N3** und des relativen Minimums mit einer Stellengenauigkeit von 9 Stellen nach dem Komma zu schätzen. Die Wertetabelle mit den Überschriften X,Y,Y' und Y" dient zur graphischen Darstellung der Funktion und deren erster und zweiter Ableitung im Bereich -10 bis +10. So können wir sehen, wo sich in etwa die Nullstellen befinden (Abb.1), um einen in der Nähe befindlichen x-Wert als seed value einzugeben.

Die Eingabe dieses x-Wertes sowie die ermittelten Abszissen- und die vom Computer berechneten Ordinatenwerte projezieren wir schließlich auf eine optisch gefällige Tabelle. So entsteht - wie bei anderen Programmen - der Eindruck, dass zwischen der Eingabe einer Zahl und der Ausgabe der Ergebnisse nur ein Tastendruck liegt (Tab.2).

Tabelle 2
Darstellung von Ein- und Ausgabe

	XY-Wert	Nullstelle	Minimum	Wendepunkt
x	9	7.0827625	4.1943351	0.6666667
y	40.5000000	0.0000000	-18.7320566	-4.0967654

Wir aber können jetzt abschätzen, wie viele Rechenschritte dazwischen liegen, obwohl sie unser Computer in weitaus weniger als einer Sekunde erledigt.

Anwendungsbeispiel

Um zu sehen, wie wirksam die *Newton*sche Methode der Nullstellen-Approximation ist, untersuchen wir das Polynom dritten Grades

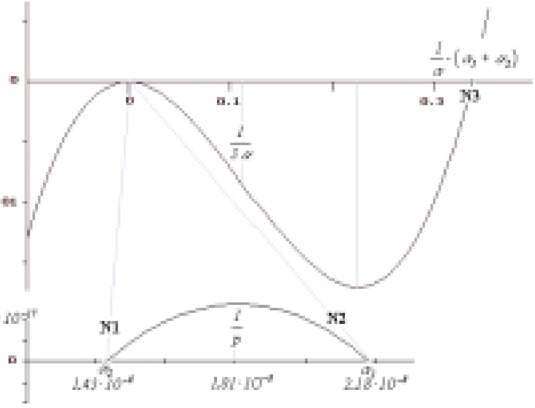
$$y = 2.953 \cdot x^3 - x^2 + 3.613 \cdot 10^{-8} \cdot x - 3.126 \cdot 10^{-16};$$

dessen graphische Darstellung in Abb.3 erscheint. Es handelt sich bei dieser Gleichung um die Formel für das effektive Potenzial V_{eff},

$$V_{eff} = \alpha \cdot x^3 - x^2 + \frac{\alpha}{B^2} \cdot x + \frac{2A}{B^2};$$

mit x = 1/r; r = Abstand Sonne-Merkur;
$p = 5.54 \cdot 10^7$km Formparameter der Bahnellipse;
$\alpha = 2GM/c^2 = 2.953$ km; $B^2 = GM \cdot p = 7.37 \cdot 10^{18}$ km^4/s^2; $A = -GM/2a = -1150$ km^2/s^2;
die *Albert Einstein (1915)* verwendet hat, um die Periheldrehung des Merkur zu berechnen. Wie wir der Abb.3 entnehmen, hat die Funktion ein relatives Maximum nahe dem Nullpunkt, wobei die Kurve die x-Achse von unten her zu berühren scheint, einen Wendepunkt in der Nähe von 0.1, ein Minimum in der Gegend von 0.2 und eine Nullstelle bei 0.3.

Abbildung 3
Darstellung der Funktion des effektiven Potentials der Merkur-Bahn



Zur Bestätigung unserer Beobachtung geben wir als Anfangswert X = 0 ein und stellen zu unserem Erstaunen fest, dass uns das Programm eine Nullstelle N1 bei x = 1.435*10^{-8} ausweist. Das Maximum befindet sich bei 1.8067*10^{-8}, dem Kehrwert des Formparameters p der Bahnellipse, und der Wendepunkt bei 0.1129 = 1/3α. Selbst wenn wir den X-Wert unsinnig stark verändern, z.B. auf –10 000, bedarf es nur einiger weniger Iterationsschritte mehr, um wieder bei den selben Werten zu landen.

Da sich offenbar das Maximum oberhalb der x-Achse befindet, der Wendepunkt aber unterhalb der x-Achse steht, bedeutet dies, dass es eine zweite Nullstelle zwischen dem Maximum und dem Wendepunkt geben muss. Wir geben also als weiteren Anfangswert den x-Wert des Wendepunktes ein und treffen - in der Tat - auf die Nullstelle N2 bei 2.1786*10^{-8}.

Erst eine 10-millionenfache Vergrößerung der ursprünglichen Skala zeigt uns graphisch dieses Detail (Abb. 3 unten). Wie sich herausstellt, handelt es sich bei den beiden Nullstellen N1 und N2 um die Kehrwerte des maximalen (α_1) und minimalen (α_2) Abstandes des Planeten Merkur von der Sonne.

N3	=	0.338611083708765
N1= α_1	=	0.000000014347201
N2 = α_2	=	0.000000021786496
$\alpha_1 + \alpha_2$	=	0.000000036133698
1/α	=	0.338611119842462
1/α-($\alpha_1 + \alpha_2$)	=	0.338611083708765

Die genau iterierten Werte verdeutlichen, dass N3, der x-Wert der dritten Nullstelle, nach *Vieta* der Gleichung

$$N3 = x_3 = \frac{1}{\alpha} - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

genügt. Dies bedeutet aber auch, dass die *Newton*-sche Methode nicht nur den Augenschein bestätigt, sondern so genau ist, dass sie uns sogar eine ultramikroskopische Untersuchung einer Funktion liefert.

Literatur

Einstein, A.1915: Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der Allgemeinen Relativitäts-theorie. Sitzgsber.d.preuß. Akad.d.Wiss.1915, 831.
Kühlein, T.1942: Differential-Rechnung I. Mentor Repetitorien Bd. 58. Berlin.