Berechnung des Luftwiderstandes einer Wasserrakete aus maximaler Flughöhe und Dauer des freien Falls

Christian Strutz

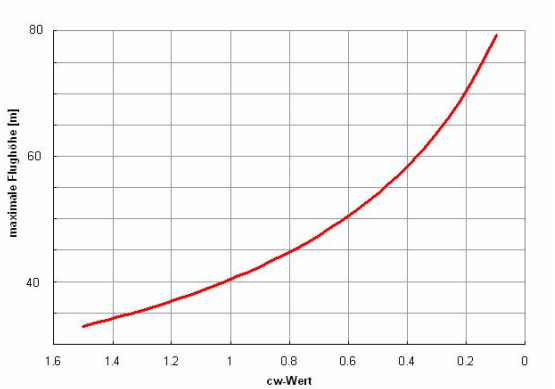

Abb. 1: Einfluß des cw-Wertes auf die maximale Flughöhe einer Wasserrakete

Bedeutung des c_w-Wertes

Die Was-Wäre-Wenn-Kalkulation eines sehr genauen Simulationsprogramms[1] ($\Delta t = 0.0001 s$) zur Berechnung des Fluges einer Shootinger-Wasserrakete[2] hat ergeben, dass die Verringerung des c_w-Wertes von 1.5 auf 0.1 eine Steigerung der maximalen Flughöhe von 30 auf fast 80 m bei sonst gleichbleibenden Anfangsbedingungen bewirkt (Abb. 1).

Der c_w-Wert übt also einen bedeutenden Einfluß auf die Effizienz der Wasserrakete und die Voraussagen ihrer Leistung aus. Die Tabelle1 zeigt die Berechnungsgrundlagen.

Erdbeschleunigung g	9.80665	m/s²	Leergewicht m_C	0.214000	kg
Durchmesser RD	0.09000	m	Querschnittsfläche A	0.006362	m²
Dichte Luft ρ_A	1.22300	kg/m³	max. Fallgeschwindigkeit v_{max}	27.760835	m/s
Reibungsbeiwert c_w	0.70000		Reibungskonstante k	0.002723	kg/m

Tab. 1: Natürliche, geschätzte und berechnete Konstanten für die Berechnung der Eigenschaften des freien Falls einer leeren Shootinger-Wasserrakete.

Als Koeffizient ist der c_w-Wert eine entscheidende Komponente des Luftwiderstandes R:

(1) $$R = \rho_A \cdot c_w \cdot A \cdot \frac{v^2}{2} ,$$

wobei ρ_A die Luftdichte, A die Querschnittsfläche der Rakete und v die aktuelle Geschwindigkeit bedeuten. Mit k lassen sich alle Konstanten zusammenfassen,

$$k = ½ \cdot \rho_A \cdot c_w \cdot A ,$$

so dass mit der Gleichung (1a) deutlich wird, dass die Luftreibung dem Quadrat der Raketengeschwindigkeit proportional ist:

(1a) $$R = k \cdot v^2 .$$

Wenn die Reibungskonstante k bekannt ist, lässt sich der c_w-Wert leicht ermitteln:

(2) $$c_w = \frac{2k}{\rho_A \cdot A} .$$

Beeinflussen können wir den c_w-Wert durch die Form und Windschlüpfrigkeit[3] der Rakete, also das "Finishing" (Abb. 2). Gemessen wird der c_w-Wert einer Rakete normalerweise im Windtunnel[4]. Dieses Verfahren ist aber sehr aufwändig und obendrein mit meßtechnischen Unsicherheiten behaftet. So müssen wir in der Regel dem c_w-Wert einen groben Schätzwert geben, um ihn dann nach gemessener Flugzeit und -höhe zu korrigieren. Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, wie wir den c_w-Wert als

Ergebnis einer Iteration sehr genau berechnen können.

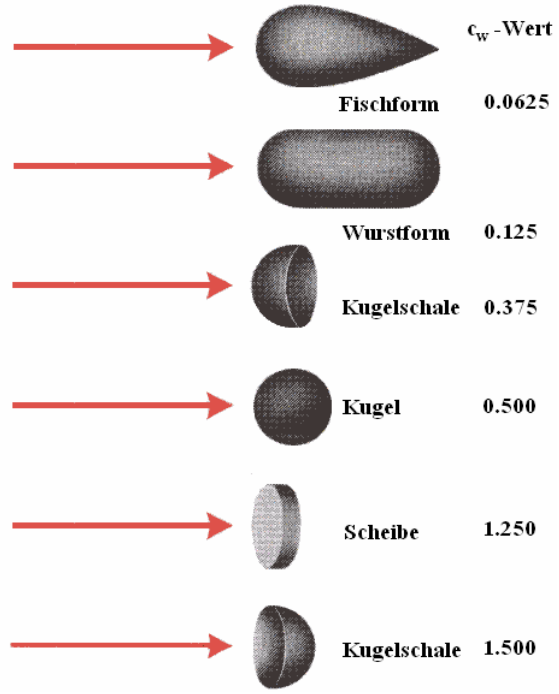

Abb. 2: cw-Werte verschiedener Körper gleichen Querschnitts, die entweder von links angeströmt werden oder sich nach links bewegen.

Berechnung der Fallgeschwindigkeit

Sobald die Rakete im Leerlauf ihre maximale Flughöhe (Apogäum) in Erdnähe erreicht hat steht sie nur noch unter dem Einfluß der Erdanziehung und der ihr entgegen wirkenden Luftreibung. Sie fällt nach der Gesetzmäßigkeit des Freien Falls, wobei zunächst nur die Gewichtskraft G

(3) $$G = m \cdot g$$

mit m, der Masse der Rakete, und g, der Erdbeschleunigung, wirkt. Mit wachsender Fallgeschwindigkeit steigt aber der Einfluß der Lutreibung, bis sich beide Kräfte, G und R, die Waage halten

(4) $$m \cdot g = k \cdot v_d^2;$$

(4a) $$v_d = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$$

und die Rakete eine konstante maximale Fallgeschwindigkeit v_d (d für "descent" = Abstieg, Fall) erreicht hat. Bei einer leeren Shootinger-Wasserrakete ist dies näherungsweise erst nach 12 Sekunden bzw. einem Sturz aus 300m Höhe der Fall. Die Kräfteverhältnisse vor dem Gleichgewicht zeigt die Gleichung (5):

(5) $$-T = -m \cdot g + k \cdot v^2;$$
$$T = m \cdot g - k \cdot v^2.$$

Die Umkehrung der "wahren" Vorzeichen, negativ: in Richtung Erde, positiv: der Erde entgegengesetzt, erleichtert uns den Rechengang.

Nach welchem Fallweg hat die Rakete welche Geschwindigkeit erreicht? Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Steigerung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung der Rakete kennen. Nach Newton erhalten wir die Beschleunigung, indem wir die gesamte Kraft T durch die Leermasse der Rakete teilen:

(6) $$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{m} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 = g \cdot \left(1 - \frac{k}{m \cdot g} \cdot v^2\right) = g \cdot \left(1 - \frac{v^2}{v_d^2}\right)$$

Sofort erkennen wir, dass mit

$$\frac{k}{m \cdot g} = \frac{1}{v_d^2}$$

das Quadrat von v_d im Nenner steht.

Den Quotienten v/v_d bezeichnen wir mit z,

$$\frac{v}{v_d} = z; \qquad dv = v_d \cdot dz$$

so dass wir nach Umformung

$$\frac{v_d \cdot dz}{dt} = g \cdot \left(1 - z^2\right);$$
$$dt = \frac{v_d}{g} \cdot \frac{dz}{1 - z^2};$$

das Standard-Integral (7) erhalten[5]:

(7) $$t = \frac{v_d}{g} \cdot \int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$\boxed{\int \frac{dz}{1-z^2} = \operatorname{arctanh}(z) + C}$$

$$t = \frac{v_d}{g} \cdot \operatorname{arctanh}(\mathrm{z}).$$

Auch die Hyperbel-Funktionen verfügen über den Argumenten-Tausch: Die Umwandlung von arctanh in tanh bringt den Tausch des Arguments der arctanh-Funktion mit der linken Seite der Gleichung mit sich, während die linke Seite der Gleichung dann zum Argument der tanh-Funktion wird:

$$t \cdot \frac{g}{v_d} = \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_d}\right);$$

$$\frac{v}{v_d} = \tanh\left(\frac{g}{v_d} \cdot t\right).$$

Mit der Gleichung (8) können wir die Fallgeschwindigkeit nach gegebener Fallzeit *t* berechnen:

(8) $$v = v_d \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_d} \cdot t\right).$$

Da wir sie aber nicht gemessen haben, kennen wir diese Zeit *t* noch nicht. Wir können aber annehmen, die Rakete habe eine maximale Höhe von 50 m erreicht. Wie lange braucht sie dann bis sie auf dem Boden aufzuprallt?

Berechnung der Falldauer

Zu berechnen ist die Zeit *t* in Abhängigkeit von der Fallhöhe s . Gehen wir von der Geschwindigkeit (gleich Weg durch Zeit) der Gleichung (8) aus: $v = ds/dt$. Der als winzig klein gedachte Wegunterschied ist dann $ds = v \cdot dt$. Eingesetzt ergibt das

(9) $$ds = v_d \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_d} \cdot t\right) \cdot dt; \quad \text{wobei}$$

$$\frac{g}{v_d} \cdot t = u \text{ und } dt = \frac{v_d}{g} \cdot du.$$

Der Fallweg ist dann

$$s = v_d \cdot \int \tanh(u) \cdot \frac{v_d}{g} du;$$

$$s = \frac{v_d^2}{g} \cdot \int \tanh(u) \cdot du;$$

$$\frac{v_d^2}{g} = \frac{m \cdot g}{k \cdot g} = \frac{m}{k}$$

$$s = \frac{m}{k} \cdot \int \tanh(u) \cdot du.$$

Dies entspricht dem Standard-Integral[6]

$$\boxed{\int \tanh(u) \cdot du = \ln(\cosh(u)) + C},$$

also zur Formel (10) für die Berechnung der Fallhöhe *s* bei bekannter Fallzeit *t*:

(10) $$s = \frac{m}{k} \cdot \ln(\cosh(u))$$

Zwar mag es nicht so zu scheinen aber mit der Gleichung (10) sind wir schon sehr nahe an der Zeitbestimmung in Abhängigkeit von der Fallhöhe *s*. Zunächst holen wir den Quotienten m/k als k/m auf die linke Seite der Gleichung.

$$s \cdot \frac{k}{m} = \ln(\cosh(u));$$

Dann eliminieren wir den Natürlichen Logarithmus, indem wir $s \cdot k/m$ zum Exponenten einer eFunktion erheben:

$$e^{s \cdot \frac{k}{m}} = \exp\left(s \cdot \frac{k}{m}\right) = \cosh\left(\frac{g}{v_d} \cdot t\right).$$

Schließlich vertauschen wir wieder das Argument des cosh mit dem Ausdruck der linken Seite indem wir den arccosh bilden. Wir erhalten:

$$(11) \qquad \frac{g}{v_d} \cdot t = \operatorname{arccosh}\left(\exp\left(s \cdot \frac{k}{m}\right)\right),$$

eine Gleichung, die uns mit (11a) eine direkte Zeitbestimmung ermöglicht.

$$(11a) \qquad t = \frac{v_d}{g} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\exp\left(s \cdot \frac{k}{m}\right)\right)$$

Wir sind am Ziel. Jetzt stehen uns gleich zwei Möglichkeiten offen: Entweder gehen wir von der maximalen Flughöhe (Apogäum) als der unabhängigen Variablen aus und deklarieren sie zur Fallhöhe (Weg *s*), um die Fallzeit *t(s)* und die Aufprall-Geschwindigkeit *v(s)* nach den Gleichungen (11a) und (8) zu berechnen (Tab. 2).

$s[m]$	$a(s) = \exp\left(s \cdot \frac{k}{m}\right)$	$u(s) = \operatorname{arccosh}(a)$	$t(s) = v_d \cdot \frac{u}{g}$	$v(s) = v_d \cdot \tanh(u)$	$\% v_d$
50	1.88938	1.25059	3.54020	23.55369	84.8
1	1.01281	0.15987	0.45256	4.40066	15.9
2	1.02578	0.22657	0.64137	6.18426	22.3
3	1.03891	0.27808	0.78718	7.52661	27.1

Tab. 2: Berechnung der Falldauer und Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fallhöhe

Oder wir betrachten die gemessene Fallzeit *t* als unabhängige Variable und berechnen mit ihr, wie in der Tabelle 3, die Fallhöhe *s(t)* und Aufprallgeschwindigkeit *v(t)*.

$t[s]$	$u(t) = t \cdot \frac{g}{v_d}$	$s(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln(\cosh(u))$	$v(t) = v_d \cdot \tanh(u)$	$\% v_d$
3.54	1.25059	50.00000	23.55369	84.8
1	0.35325	4.80461	9.41811	33.9
2	0.70651	18.17046	16.89201	60.8
3	1.05976	37.72316	21.80818	78.6

Tab. 3: Berechnung der Fallhöhe und Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Falldauer

Die Ergebnisse zeigen, dass die Rakete bereits nach 50 m freiem Fall 85 Prozent ihrer maximalen Fallgeschwindigkeit erreicht hat und nach 3½ Sekunden Sturzflug mit 85 km/h auf dem Boden aufschlägt. Die Abbildung 3 verdeutlicht den zeitlichen Verlauf des Fallweges und der Fallgeschwindigkeit.

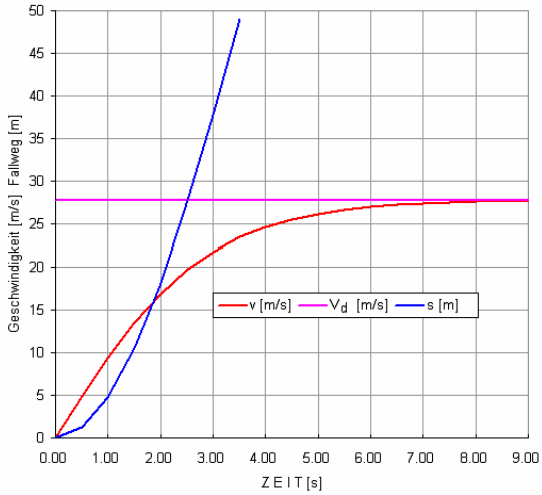

Abb. 3: Zeitlicher Verlauf des Fallweges und der Fallgeschwindigkeit

Berechnung des c_w-Wertes

Wenn wir die maximale Flughöhe und die Falldauer der Rakete genau messen, können wir ihre Luftreibungskonstante *k* und somit auch den c_w-Wert durch Einsetzen in die Gleichung (10) bestimmen, denn wir können sie nach *k* auflösen:

$$(10a) \qquad k = \frac{m}{s} \cdot \ln(\cosh(u)).$$

Im Argument *u* ist aber eben dieses *k* enthalten:

$$u = t \cdot \frac{g}{v_d} = t \cdot \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}},$$

so dass in erweiterter Form die Gleichung (10a) lautet:

$$(10a) \qquad k = \frac{m}{s} \cdot \ln\left(\cosh\left(t \cdot \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}}\right)\right).$$

Die Unbekannte k befindet sich also auf beiden Seiten der Gleichung. Wir können die Größe der Luftreibungskontante nur durch "probieren" ermitteln, indem wir für k einen Schätzwert (KGUESS) einsetzen und prüfen, ob dieser mit dem Wert der Formel (FORMEL) auf der rechten Seite der Gleichung übereinstimmt.

$$\mathrm{KGUESS} \geq \frac{m}{s} \cdot \ln\left(\cosh\left(t \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \mathrm{KGUESS}}{m}}\right)\right)$$

Wenn dies nicht der Fall ist, übernimmt KGUESS den zuvor berechneten Wert der Formel, und das Vergleichsspiel beginnt von Neuem. Glücklicherweise kann uns unser PC dieses zeitraubende Ping-Pong-Iterations-Spiel mühelos abnehmen. Das entsprechende LOTUS 1-2-3 Makro lautet:

```
\Z      {if KGUESS>FORMEL}
        {let KGUESS, FORMEL}
        {\Z}
```

Natürlich handelt es sich hierbei um eine Endlos-Schleife, die wir aber ohne weiteres mit der Esc-Taste abbrechen können. Die Tabelle 4 zeigt das Ergebnis der Iterationen unter Verwendung von $t = 3.54$ und $s = 50$, wobei als "seed value" für KGUESS der unsinnige Wert von 0.5 eingegeben wurde.

t	s	KGUESS	k	c_W	v_{max}
3.54	50	0.002723	0.002723	0.700000	27.760835
	Iteration				
	0	0.500000	0.035874	46.684959	8.1494254
	n	0.002723	0.002723	0.700000	27.760835

Tab. 4: Bestimmung der Luftreibungskonstanten, des cw-Wertes und der maximalen Fallgeschwindigkeit durch Iterationen.

Der auf sechs Stellen genaue "Schätzwert" des cw-Wertes gibt uns eine Vorstellung davon wie präzise die angewandte Methode ist.

Dimensionierung eines Fallschirms

Der ungebremste Aufprall aus größerer Höhe rechtfertigt die Verwendung eines Brems-Fallschirms um die Beschädigung der Rakete selbst und anderer Gegenstände, z.B. parkender Autos, zu vermeiden. Als "akzeptable" Fallgeschwindigkeit v_P gelten 4 m/s d.h. 14.4 km/h. Diese Geschwindigkeit erreicht eine leere Shootinger -Rakete nach einem ungebremsten Fall aus weniger als einem Meter Höhe (Tab. 2). Der Form des Fallschirms als Kugelschale entsprechend verwenden wir den c_W-Wert 1.5 (Abb. 2). Indem wir v_P und den c_W-Wert in die Gleichung (4) einsetzen und nach A auflösen, erhalten wir die entsprechende Querschnittsfläche des Brems-Fallschirms[7]:

$$\text{(4a)} \qquad A = \frac{2 \cdot m \cdot g}{v_P^2 \cdot \rho_A \cdot c_w}.$$

Für die leere Shootinger-Wasserrakete lautet das Ergebnis $A = 0.143\,\mathrm{m}^2$. Da der Stoff der "Haube" aber die doppelte Fläche der Querschnittsfäche A haben muss, betägt sein Durchmesser D

$$D = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot A}{\pi}},$$

0.60 m. Das entspricht dem Durchmesser von 61 cm der mitgelieferten Plastik-Folie in Form eines Oktaeders.

---

[1] C. Strutz 2005: Iterative predictors of water rocket flight events. PDF in Vorbereitung.
[2] Academy Plastic Model Europe. http://academy-europe.de/18101.htm
[3] Richard Knerr 1999: Goldmann Lexikon Physik. S. 22. BLI, Gütersloh/München.
[4] John S. DeMar 1995: Model rocket drag analysis using a computerized wind tunnel. http://web.syr.edu/~smdemar/rocketdrag.html
[5] Theo Kühlein 1975: Integralrechnung I, Leitfaden. S. 132 [117]. Mentor-Repetitorien Nr. 35. Mentor-Verlag Dr. Ramdohr KG München.
[6] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig 1999: Taschenbuch der Mathematik. S. 1047 Nr. 436. Verlag Harri Deutsch. Frankfurt a. M.; Thun.
[7] Randy Culp 2000: Parachute descent calculations. http://my.execpc.com/~culp/rockets/rckt_eqn.html