Berechnung der Leerlaufhöhe und Leerlaufzeit einer Wasserrakete mit Fehskens-Malewicki-Gleichungen[1]

Christian Strutz

Problemstellung

Bei einer Wasserrakete besteht zwischen dem Druck P im Inneren der Rakete durch eingepumpte Luft und der Raketen-Geschwindigkeit zum Endpunkt des Wasserausstoßes v_b als grober Schätzung[2] die Wurzelbeziehung

(1) $$v_b = \frac{m_P}{m_0} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P}{\rho_W}};$$

wobei m_p das Wasser als Treibstoffmasse (p für "propellant"), m_0 die Raketen-Sartmasse und ρ_w die Dichte des Wassers bedeuten.

Charakteristisch für solch eine Beziehung ist ihr Verlauf des abnehmenden Grenzertrages. Das bedeutet hier, dass einer Steigerung des Druckes P ein immer geringerer Zuwachs an Geschwindigkeit entspricht. Zur Bestätigung zeigt die Abbildung 1 das Ergebnis einer Was-Wäre-Wenn-Kalkulation der Geschwindigkeit v_b[3] und der Leerlaufhöhe einer Wasserrakete h_c in Abhängigkeit vom Druck P.

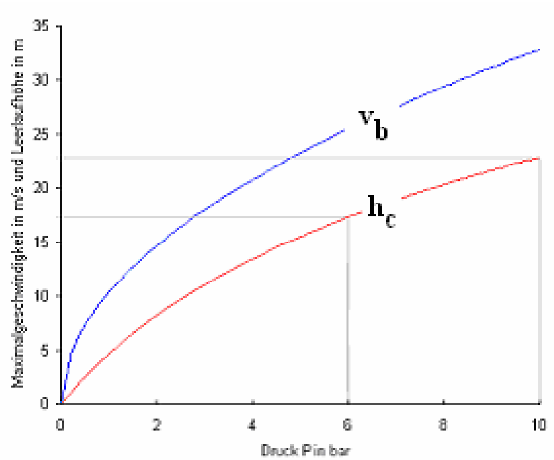

Abb. 1: Geschwindigkeit v_b und Leerlaufhöhe h_c einer Wasserrakete in Abhängigkeit vom Raketen-Innendruck P.

Berechnungen haben ergeben, dass die Beschleunigungsphase, d.h. der Ausstoß des Wassers samt Preßluft, nur etwa 20 bis 50 Millisekunden dauert und einem Schuß gleichzusetzen ist[4]. Entsprechend gering ist die Flughöhe am Ende dieser Phase.

Die entscheidende Komponente für die Flughöhe einer Wasserrakete ist die Leerlaufphase. Bei ihr handelt es sich um einen durch Schwerkraft $-m_C \cdot g$ und Luftwiderstand $-k \cdot v^2$ gebremsten Senkrechtflug bis zum Scheitelpunkt. Darum tragen die beiden Bremskomponenten ein negatives Vorzeichen.

Weder die Luftverdünnung nach dem barometrischen Höhengesetz noch die Abnahme der Erdanziehung nach dem Entfernungsquadratgesetz spielen bei den geringen Flughöhen einer Wasserrakete eine Rolle.

Die Geschwindigkeit nimmt von v_{max}, der mit Excel iterierten Maximalgeschwindigkeit zwischen dem Ende des Wasseraustoßes und dem Ende des darauf folgenden Luftausstoßes[5], bis zum Stillstand $v = 0$ im Scheitelpunkt ab. Somit ist die Leerlauf-höhe h_c ein Integral der Flugge-schwindigkeit. Die folgenden Zeilen versu-chen, die mathematische Beschreibung dieses physikalischen Phänomens zu erklä-ren.

Berechnung der Leerlaufhöhe

Nach Newtons Prinzip *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* gilt:

(2) $$T = m_C \cdot a = m_C \cdot g + k \cdot v^2,$$

wobei T die Schubkraft, m_C die Leermasse der Rakete (c für "coast" = Leerlauf), a die Beschleunigung, g die Erdbeschleunigung, k eine von der Raketen-Querschnittsfläche A_D und Form c_W abhängige Konstante und v die augenblickliche Raketengeschwindigkeit bedeuten[6].

Zur Formulierung des Integrals muss ich die Beschleunigung a als Geschwindigkeits-Differential verwenden:

$$(3) \qquad m_C \cdot v \cdot \frac{dv}{dh} = m_C \cdot g + k \cdot v^2;$$

$$dh = \frac{m_C \cdot v}{m_C \cdot g + k \cdot v^2} \cdot dv$$

Die spezielle Definition der Beschleunigung a :

$$a = v \cdot \frac{dv}{dh};$$

in der Gleichung (3) bedarf vielleicht einer Erklärung: Wenn ich mit der konstanten Momentangeschwindigkeit $v = 60$ km/h fahre, meine Uhren ausgefallen sind, ich aber - theoretisch - wissen will, wieviel Zeit nach 5 km Fahrt verstrichen ist, so muss ich rechnen:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{5\ km}{60\ km/h} \approx 5 \text{ Min}.$$

Genau mit diesem Quotienten: ds/v, wobei in unserem Fall der Weg s durch die Höhe h ersetzt ist, substituiere ich den in der Beschleunigung a enthaltenen infinitesimalen Zeitunterschied dt :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\frac{dh}{v}} = v \cdot \frac{dv}{dh}.$$

Mit dem Quotienten *k/k* erreiche ich, dass ich eine Hilfsgröße mit k im Nenner einsetzen und danach k ausklammern kann:

$$dh = \frac{m_C \cdot v}{\frac{k}{k} \cdot m_C \cdot g + k \cdot v^2} \cdot dv.$$

In dem Ausdruck

$$v_d^2 = \frac{m_C \cdot g}{k}$$

erkenne ich allerdings das Quadrat der Gleichgewichts- und maximalen Fallgeschwindigkeit v_d (der Index d steht für "descent" = Abstieg), bei der sich im freien Fall der Rakete die Luftreibung $R = k \cdot v^2$ und die Schwerkraft $G = m_C \cdot g$ die Waage halten[7]:

$$m_C \cdot g = k \cdot v_d^2$$

$$v_d^2 = \frac{m_C \cdot g}{k}.$$

So findet das Quadrat v_d^2 seinen Platz in der Gleichung:

$$(3) \qquad dh = \frac{m_C}{k} \cdot \frac{v}{v_d^2 + v^2} \cdot dv.$$

Das zugehörige Integral lautet dann:

$$(4) \qquad h_C = \frac{m_C}{k} \cdot \int_0^{vb} \frac{v}{v_d^2 + v^2} \cdot dv.$$

Das Integral der Gleichung (4) stimmt mit folgender Standard-Form und Lösung in Integral-Tabellen[8] überein:

$$\boxed{\int \frac{x}{q^2 + x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(q^2 + x^2\right) + C}.$$

Ich übernehme die Lösung dieses Integrals

$$(6) \qquad h_C = \frac{m_C}{k} \cdot \left| \frac{1}{2} \cdot \ln\left(v_d^2 + v^2\right) \right|_0^{v\max};$$

$$h_C = \frac{m_C}{2k} \cdot \ln\left(v_d^2 + v_{\max}^2\right) - \frac{m_C}{k} \cdot \ln\left(v_d^2\right);$$

$$h_C = \frac{m_C}{2k} \cdot \ln\left(\frac{v_{\max}^2 + v_d^2}{v_d^2}\right);$$

$$h_C = \frac{m_C}{2k} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_{\max}^2}{v_d^2}\right);$$

und erhalte die Fehskens-Malewicki Gleichung für die Berechnung der Leerlaufhöhe einer Rakete unter Einbeziehung der Schwerkraft und des Luftwiderstandes.

Wir erweitern den konstanten Faktor mit g/g und erhalten mit (6a)

$$\text{(6a)} \qquad h_C = \frac{m_C}{2k} \cdot \frac{g}{g} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_{\max}^2}{v_d^2}\right);$$

$$\boxed{h_C = \frac{1}{g} \cdot \frac{v_d^2}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{v_{\max}^2}{v_d^2}\right)}$$

eine "durchsichtigere" Formel für die Leerlaufhöhe. Diese Formel wurde für die Berechnung der Was-Wäre-Wenn Kurve der Abbildung 1 verwendet. Die 1 im Argument des Natürlichen Logarithmus sorgt dafür, dass die Funktion bei $P = 0$ und $v = 0$ ihre Nullstelle hat, denn $\ln(1) = 0$.

Berechnung der Leerlauf-Zeit

Die Abbildung 2 zeigt die Was-Wäre-Wenn-Beziehung zwischen dem Druck P und der Leerlaufzeit bis zum Erreichen des Umkehrpunktes.
Auch hier sehen wir die Form des abnehmenden Zuwachses.

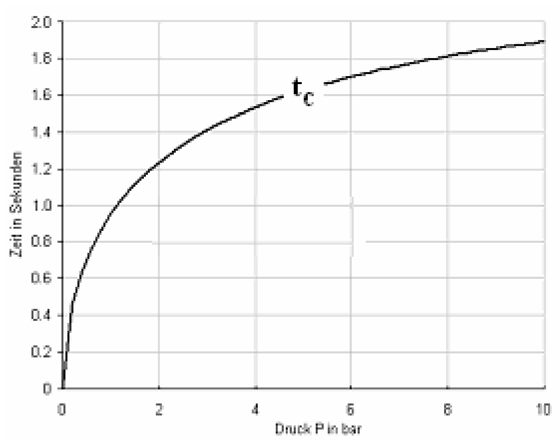

Abb. 2: Leerlaufzeit t_c in Sekunden in Abhängigkeit vom Luftdruck P im Inneren der Wasserrakete.

Um die während des Leerlaufs verstrichene Zeit t_C zu berechnen, muss ich dt aus der negativen Beschleunigung oder Bremsung $-a$ herausschälen:

$$\text{(7)} \qquad m_C \cdot \left(-\frac{dv}{dt}\right) = -m_C \cdot g - k \cdot v^2;$$

$$dt = m_C \cdot \frac{dv}{m_C \cdot g + k \cdot v^2}.$$

Die Multiplikation von Zähler und Nenner mit -1 führt dazu, dass alle Faktoren und Komponenten ein positives Vorzeichen erhalten. Auch die Größe v_d^2

$$v_d^2 = \frac{m_C \cdot g}{k}$$

hat naturgemäß ein positives Vorzeichen. Wieder führen wir k/k ein und substituieren mit v_d^2:

$$\text{(7a)} \qquad dt = m_C \cdot \frac{dv}{\frac{k}{k} \cdot (m_C \cdot g) + k \cdot v^2}$$

$$dt = \frac{m_C}{k} \cdot \frac{dv}{v_d^2 + v^2};$$

$$t_C = \frac{m_C}{k} \cdot \int_0^{vb} \frac{dv}{v_d^2 + v^2}.$$

Auch dieses Integral stimmt mit der Standard-Form und Lösung in Integral-Tabellen überein:

$$\boxed{\int \frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{1}{q} \cdot \arctan\left(\frac{x}{q}\right) + C}.$$

Das für die Schätzung der Leerlaufzeit verwendete Modell

$$y = \int \frac{dx}{q^2 + x^2};$$

ist eine um q^2 erweiterte Variante von

$$\boxed{\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(x) + C}.$$

Wir klammern im Nenner q^2 aus und substituieren mit z. Wir setzen $z = x/q$, dann ist $dx = q \cdot dz$.

$$y = \int \frac{q \cdot dz}{q^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{q^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{q} \cdot \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{q} \cdot \arctan(z) = \frac{1}{q} \cdot \arctan\left(\frac{x}{q}\right).$$

Die Lösung des Integrals zur Berechnung der Leerlaufzeit lautet demnach:

$$t_C = \frac{m_C}{k} \cdot \int_0^{v\max} \frac{dv}{v_d^2 + v^2}$$

$$= \frac{m_C}{k \cdot v_d} \cdot \arctan\left(\frac{v_{\max}}{v_d}\right)$$

Zur Vereinfachung setze ich das Äquivalent von v_d im Nenner des konstanten Faktors ein, erweitere Zähler und Nenner mit g und erhalte:

(8) $$\boxed{t_C = \frac{1}{g} \cdot |v_d| \cdot \arctan\left(\frac{v_{\max}}{|v_d|}\right)}.$$

Die Absolutheitszeichen sind eingesetzt, um zu verdeutlichen, dass es sich bei vd nicht um die maximale Sinkgeschwindigkeit mit negativem Vorzeichen sondern um vd mit positivem Vorzeichen handelt. Auch in Gleichung (8) handelt es sich um die Fehskens-Malewicki-Gleichung für die Berechnung der Leerlaufzeit.

Gemeinsamkeiten

Bemerkenswert scheint mir der Quotient $v_{\max}/v_d$, also das Verhältnis zwischen der maximalen Steig- und der maximalen Fallgeschwindigkeit, zu sein. Dieses tritt als Quadrat im Argument des natürlichen Logarithmus in der Formel für die Leerlaufhöhe und auch im Argument des Arcus-Tangens in der Formel zur Berechnung der Leerlaufzeit auf.

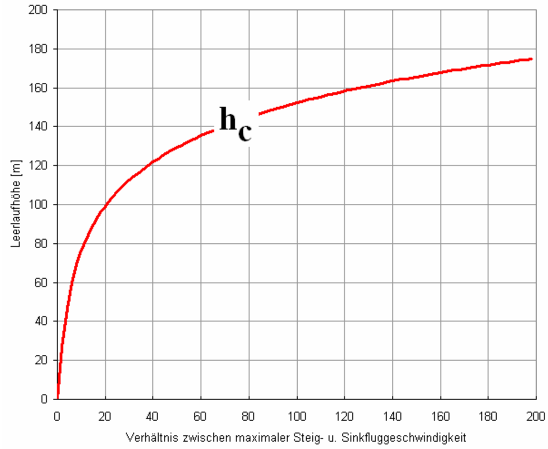

Abb. 3: Leerlaufhöhe h_c in Metern in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen maximaler Steig- und Fallgeschwindigkeit.

Eine Modellrechnung zur Schätzung der Leerlaufhöhe in Abhängigkeit von diesem Verhältnis zwischen maximaler Steig- und Fallgeschwindigkeit zeigt (Abb. 3): Auch hier haben wir es mit dem Gesetz des abnehmenden Grenzertrages zu tun. Eine Wasserrakete scheint also bei bestem Willen nicht höher als 200m fliegen zu wollen.

---

[1] Zitiert in: Randy Culp 2004: Rocket Equations. http://my.execpc.com/~culp/rockets/rckt_eqn.html

[2] Einen genaueren Wert liefert vielleicht die Raketen-Gleichung von Ziolkowski

$$v_b = v_{EX} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_W}\right) - g \cdot t_b$$

unter der Annahme, dass die Ausstoßgeschwindigkeit v_{EX} konstant bleibt oder die Fehskens-Malewicki-Gleichung

$$v_b = \sqrt{\frac{T - m_b \cdot g}{k}} \cdot \tanh\left(\frac{t_b}{m_b} \cdot \sqrt{k \cdot (T - m_b \cdot g)}\right)$$

unter zusätzlicher Einbeziehung der Schwerkraft und des Luftwiderstandes.

[3] Die Bezeichnung b steht für "burnout".

[4] Christian Strutz und Angelo Rupflin 2005: Höhenflug einer Wasserrakete. http://www.schulphysik.de/strutz/strutz.htm

[5] Christian Strutz 2005: Iterative Predictors of Water Rocket Flight Events. PDF in Vorbereitung.

[6] Randy Culp 2004: Rocket Equations. http://my.execpc.com/~culp/rockets/rckt_eqn.html

[7] Christian Strutz 2005: Berechnung des Luftwiderstandes einer Wasserrakete aus maximaler Flughöhe und Dauer des freien Falls. http://www.schulphysik.de/strutz/luftwiderstandrakete.pdf

[8] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig 1999: Taschenbuch der Mathematik. S.423, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M., Thun.