

## Woher kommt dieser Faktor 1.22? Über die Berechnung der Lichtbeugung hinter einer Kreisblende und die entsprechende Bessel-Funktion

Christian Strutz

Jede Linse und jede runde Blende im Strahlengang eines optischen Gerätes stellt eine beugende Öffnung dar. Zum Verständnis der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente brauchen wir deshalb eine genaue Kenntnis über die Verteilung der Lichtintensität hinter einer Kreisblende. Deren Berechnung ist schwieriger als beim Spalt. Sie gelang erst dem französischen Ingenieur und Physiker *Augustin Jean Fresnel* (1788-1827) durch seine mathematische Formulierung der *Huygens*-schen Elementarwellen<sup>1</sup>.

Beim Spalt wie bei der Kreisblende errechnen wir die Intensität, indem wir die Spalt- oder Blendenöffnung in  $N$  gleich breite Streifen zerlegen. Die von dort ausgehenden Elementarwellen addieren wir phasenrichtig im Punkt  $P(\alpha)$ . Im Falle einer kreisförmigen Öffnung müssen wir zusätzlich berücksichtigen, dass die Elementarwellen nicht alle die gleiche Intensität haben. So liegen, im Gegensatz zum Spalt, die Beugungs-Minima bei der Kreisblende nicht mehr an den Stellen  $\sin\alpha_n = n \cdot \lambda / d$ , wie in der Abb.1.

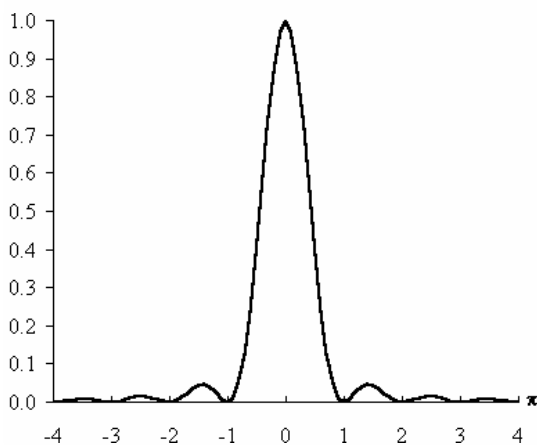


Abb. 1: Sinc-Funktion: Intensitätsverteilung des Lichtes hinter einem beugenden Spalt

Vielmehr liegen bei der Kreisblende die ersten drei Nullstellen bei

$$\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= 1.22 \cdot \lambda / d, \\ \sin\alpha_2 &= 2.24 \cdot \lambda / d \text{ und} \\ \sin\alpha_3 &= 3.24 \cdot \lambda / d. \end{aligned}$$

Es entsteht das so genannte Beugungs-scheibchen oder „*Airy disc*“, dessen Radius des ersten Minimums  $1.22 \lambda / d$  nach der *Rayleigh*-Bedingung auch das Auflösungsvermögen eines Fernrohres bestimmt:

$$(1) \quad \alpha = 1.22 \cdot \lambda / d.$$

Der Abstand zwischen zwei entfernten Punkten muss mindestens so gross sein wie der Winkel  $\alpha$  (Abb.2).

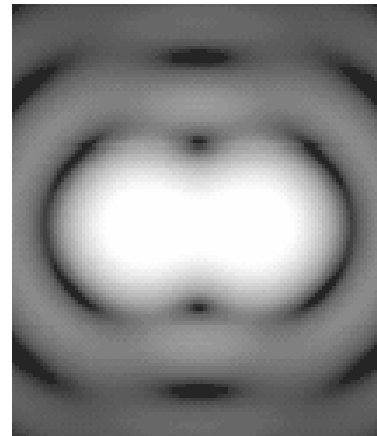


Abb.2: Doppelstern am Rayleigh-Limit:  $d = 0.2\text{m}$ ;  $\lambda = 550\text{nm}$ ;  $\alpha = 1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 180 \cdot 3600 / (\pi \cdot 0.2) = 0.69^\circ$

In dankbarer Anlehnung an das Lehrbuch Metzler Physik<sup>2</sup> will ich zeigen, wie wir in Einzelschritten - so zu sagen „zu Fuß“ - diese Werte berechnen können, um dann einen Vergleich mit der entsprechenden *Bessel*- („*Jinc*“<sup>3</sup>-) Funktion durchzuführen. Gegeben sei monochromatisches Licht der Wellenlänge  $\lambda = 500 \cdot 10^{-9} \text{m}$  und eine Kreisblende mit dem Durchmesser  $d = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Der Quotient  $\lambda/d = 0.0025$  berechtigt uns zu der Annahme, dass nach dem *Huygens*'schen Prinzip von diesem Durchmesser  $N = 400$  Elementarwellen ausgehen.

Zunächst hängt die Strahlungsintensität von dem winzig kleinen Ablenkungswinkel  $\alpha$  ab, dessen Größe wir mit  $\alpha = i \cdot k \cdot \lambda$ ;  $-1.0 \cdot 10^{-6} \leq \alpha \leq +1.0 \cdot 10^{-6}$ , berechnen, wobei  $i$  als Zählwerk mit der Begrenzung  $-100 \leq i \leq +100$  dient und  $k = 0.02$  die Schrittweite vorgibt. Die Kleinheit des Winkels  $\alpha$  berechtigt uns zur Approximation

$$(2) \quad \sin \alpha \approx \alpha .$$

Mit der Umrechnung  $x = 16 \cdot i \cdot \lambda / d$  ist der Bereich der Abszisse von  $-4$  bis  $+4$  abgesteckt.

Speziell für die Kreisblende müssen wir die Fläche des jeweiligen Streifens kennen: Wenn wir festlegen, dass der Radius des Kreises der Kreisblende gleich 1 sei, so lassen sich mit der Schrittweite  $\Delta y = 0.005$  von  $y_0 = -1$  bis  $y_{400} = +1$  insgesamt 400 Streifen der Breite  $\Delta y$  erstellen. Abhängig von der Position  $y$  beträgt die Länge solch eines Streifens

$$(3) \quad l = 2 \cdot \sqrt{1 - y^2} .$$

Die Fläche des Streifen-Rechtecks ist dann

$$(4) \quad F = l \cdot \Delta y .$$

Je nach Größe des Winkels  $\alpha$  berechnen wir die Phasendifferenz  $\Delta \varphi$  als Zuwachs der Phasenverschiebung  $\varphi$  nach der Formel

$$(5) \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta y \cdot \sin \alpha .$$

Nach dem Prinzip  $\varphi_i = \varphi_0 + \Delta \varphi$  usw. geht der Wert von  $\varphi$  in die Formeln

$$(6) \quad U = \sum_{y=-1}^{y=+1} F \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \\ V = \sum_{y=-1}^{y=+1} F \cdot \sin \varphi$$

in die Berechnung der Intensitäten ein. Für jedes  $\alpha$  gibt es also eine aus 400 Summen nach  $I = U^2 + V^2$  berechnete Intensität. Die Tab.1 zeigt das Berechnungsschema, welches wir mittels Tabellenkalkulation erledigen.

Nr	y	l	$\varphi$	$A_x$	$A_y$
0	$y_0$ -1	$\sqrt{1 - y_0^2}$ 0	$\varphi_0$ 0	$F_0 \cdot \cos \varphi_0$ 0	$F_0 \cdot \sin \varphi_0$ 0
1	$y_0 + \Delta y$ -0.995	$\sqrt{1 - y_1^2}$ 0.099875	$\varphi_0 + \Delta \varphi$ 0.063460	$A_0 + F_1 \cdot \cos \varphi_1$ 0.00099673	$A_0 + F_1 \cdot \sin \varphi_1$ 0.00006333
2	$y_1 + \Delta y$ -0.990	$\sqrt{1 - y_2^2}$ 0.141067	$\varphi_1 + \Delta \varphi$ 0.126920	$A_1 + F_2 \cdot \cos \varphi_2$ 0.00239606	$A_1 + F_2 \cdot \sin \varphi_2$ 0.00024190
...	...	...	...	...	...
400	$y_{399} + \Delta y$ 1	$\sqrt{1 - y_{400}^2}$ 0	$\varphi_{399} + \Delta \varphi$ 25.384069	$A_{399} + F_{400} \cdot \cos \varphi_{400}$ -0.06553131	$A_{399} + F_{400} \cdot \sin \varphi_{400}$ 0.0082509

Tab. 1: Berechnung der Lichtintensität des äußersten Streifens einer Kreisblende:  $x = -4$ ;  $\alpha = 0.000001$ ;  $I/I_0 = .00061157$

Entscheidend ist, mit welchem Wert die Summen von  $A_x$  und  $A_y$  bei  $y = 1$  ankommen: Insgesamt liefert uns das

Programm 400 Wertepaare, bestehend aus  $x$ -Wert und Intensität.

Ein einfaches LOTUS1-2-3<sup>®</sup> MACRO sorgt dafür, dass sich das aus jedem Rechengang ermittelte Wertepaar in eine separate Liste für die abschliessende Grafik einfügt:

\B {for i,-100,100,0.5,\A}

\A /rvVALUES~{d}

Der Name VALUES beinhaltet den jeweiligen  $x$ -Wert mit seiner Intensität. Die folgenden Abbildungen liefern drei typische Beispiele.

Die Abb.3 zeigt die Situation am äussersten Rand der Blende bei  $x = -4$ : Der Tab.1. Entsprechend erhalten wir  $U = -0.06553131$  und  $V = 0.0082509$ . Die Summe der beiden Quadrate ergibt  $U^2 + V^2 = 0.00634361$ .

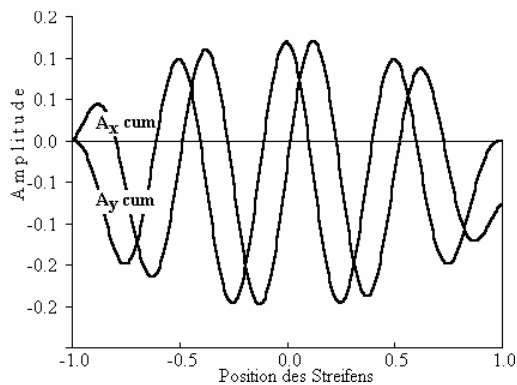


Abb.3: Kummulative Amplituden bei  $x = -4$ ;  $\alpha = 0.000001$

Bei  $x = 1.2197$ , entsprechend  $\alpha = 0.000000304$ , treffen wir offenbar auf eine - „die“-Nullstelle, wie der Abb.4 zu entnehmen ist. Hier landen, deutlich sichtbar,  $U$  und  $V$  bei Null.

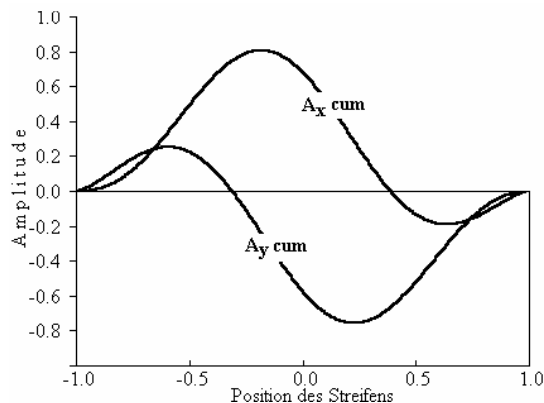


Abb.4:  $x = 1.2197$ ;  $\alpha = 0.000000304$

Das Gegenteil ist der Fall bei  $x = 0$ , entsprechend  $\alpha = 0$  in der Abb.5:

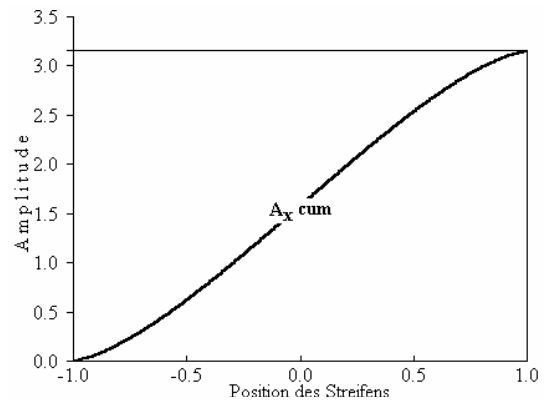


Abb.5: Kummulative Amplitude bei  $x = 0$ ,  $\alpha = 0$

Hier erreicht die  $x$ -Komponente  $U$ , aber auch nur diese, den Maximalwert von  $U = 3.1411769$ . Der  $V$ -Wert entfällt wegen  $\sin 0 = 0$ .

Dadurch, dass wir die einzelnen Intensitäten durch ihren Maximalwert  $I_{max} = I_0$  im Zentrum der Blende bei  $\alpha = 0$  teilen, erhalten wir standardisierte Intensitäten mit dem Höchstwert von 1. Schliesslich zeigt die Abb.6, als Gesamtbild aus 400 Wertepaaren, die Intensitätsverteilung des Lichtes hinter der Kreisblende, gemäß der Formel:

$$(7) \quad I / I_0 = \frac{U^2 + V^2}{U_{max}^2}$$

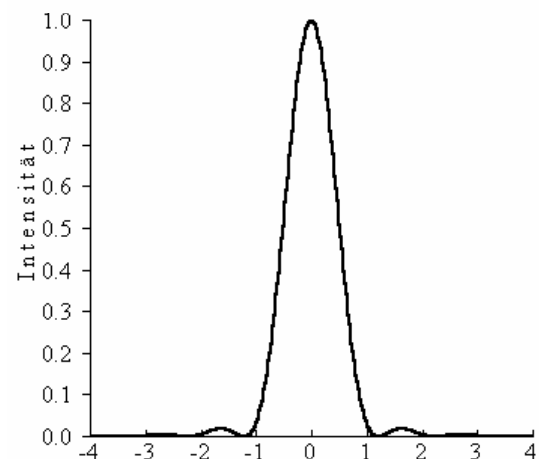


Abb.6: Jinc-Funktion: Intensitätsverteilung des Lichtes ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) hinter einer Kreisblende ( $d = 0.2 \text{ mm}$ )

Diese Abbildung zeigt, wie die Nullstellen links und rechts der Maximal-Intensität symmetrisch verteilt sind.

Ein deutlicheres Bild über die Positionen der Nullstellen erhalten wir in der Abb.7.

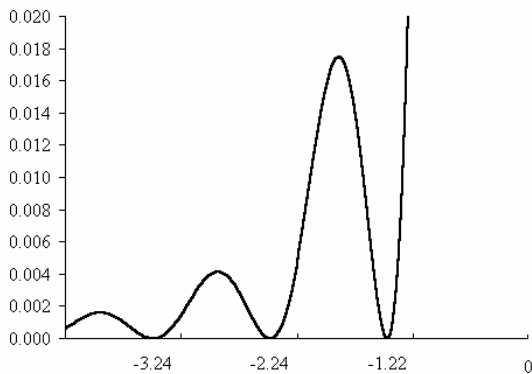


Abb.7: Detailbild der Abb.6 zur Verdeutlichung der Nullstellen

Das Interessante ist, dass wir diese Intensitätsverteilung mit ihren charakteristischen Nullstellen auch mit der Bessel-Funktion

$$(8) \quad I / I_0 = \left[ \frac{2J_1(x \cdot \pi)}{x \cdot \pi} \right]^2$$

berechnen können. Entsprechende, von EXCEL<sup>®</sup> übernommene Daten zeigen eine (fast) vollkommene Deckungsgleichheit in der grafischen Darstellung. Wie ist das möglich?

Das mathematische Abbild des *Huygens-Fresnelschen* Prinzips ist die *Fourier-Transformation* und diese ist bei der Kreisblende die *Bessel-Funktion* erster Art und erster Ordnung. Ohne uns darüber Rechenschaft abzulegen, haben wir bereits bei unseren Berechnungen die *Huygens-Wellen* einer *Fourier-Transformation* unterzogen. Aus der Übereinstimmung der beiden Berechnungen können wir deshalb auch die Bedingung für die erste Nullstelle der  $J_1$  übernehmen: Nach *Watson*<sup>4</sup> beträgt sie

$$(9) \quad J_1(x = 3.831706) = 0; \text{ also} \\ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \alpha = 3.831706$$

$$\sin \alpha_1 = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Auf ersten Blick erscheint der minimale Unterschied zwischen beiden Berechnungsmethoden rein zufälliger Natur zu sein. Erst die grafische Auswertung belehrt uns, dass wir es da, wie in der Abb.8 zu sehen, mit einer, zwar sehr kleinen, aber systematischen Abweichung, wiederum in Form einer Bessel-Funktion, zu tun haben.

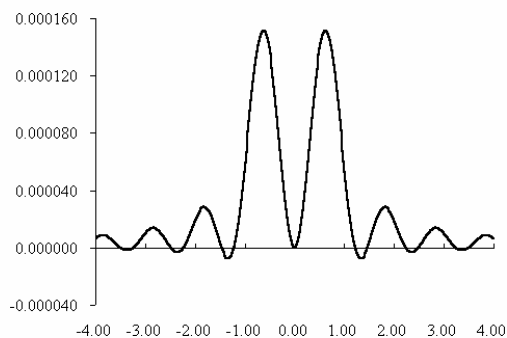


Abb.8: Unterschied D zwischen den Gleichungen (7) und (8): D = (7)-(8)

Woher diese Abweichung stammt, ist mir nicht klar. Deutlich ist nur, dass - zum Glück - die Position der ersten Nullstelle unverändert bleibt.

<sup>1</sup> Auguste Jean Fresnel: Abhandlungen über die Beugung des Lichts. Übers. u. hrsg. v. F. Ritter. Ostwald's Klassiker Nr. 215. Leipzig, 1926.

<sup>2</sup> Joachim Bolz: Elektromagnetische Schwingungen und Wellen; Intensitätsverlauf hinter einer Kreisblende. In: Metzler Physik, 3.Aufl.; Schroedel Verlag Hannover 1998.

<sup>3</sup> Justin B. Peatross and Harold Stokes: Physics of Light and Optics. (2002)

<http://optics.byu.edu/DYUOpticsTextbook.htm>

<sup>4</sup> G.N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge Univ. Press 1922.