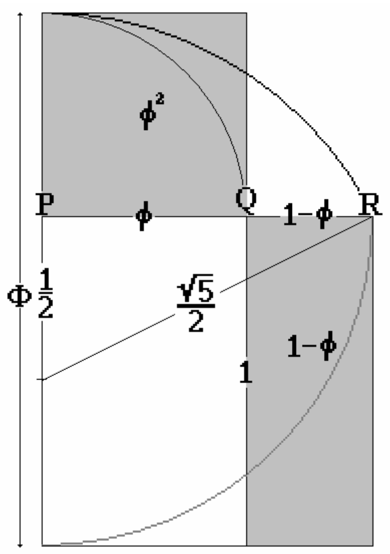
Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks aus einem Sechseck

Christian Strutz

Nach Euklid[1] bewirkt die Teilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnis oder der Goldene Schnitt[2] der Strecke $PR = 1$ im Punkt Q, dass das Quadrat über $PQ = \phi$ dem Rechteck mit den Seitenlängen 1 und $1-\phi$ flächengleich ist:

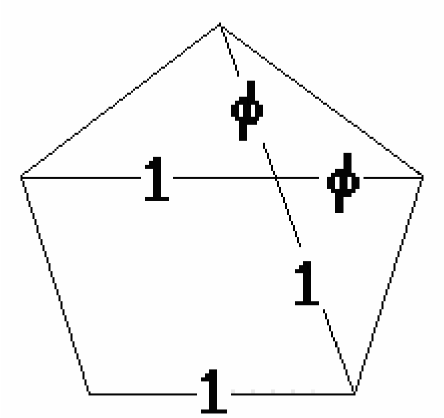
$$\phi^2 = 1 \cdot (1-\phi); \qquad \phi^2 + \phi = 1; \qquad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618033...$$



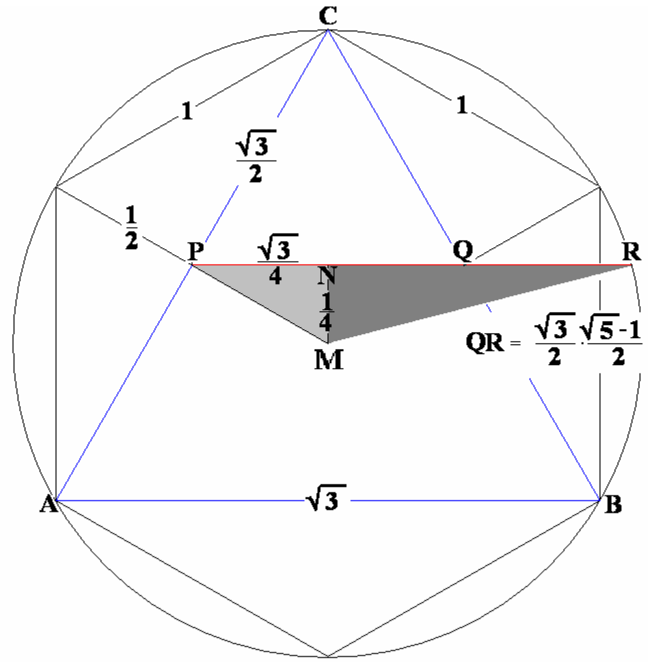
Es gilt:

$$\frac{\text{Ganze Strecke}}{\text{Größerer Teil}} = \frac{\text{Größerer Teil}}{\text{Kleinerer Teil}} = \frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1-\phi} = \Phi; \quad \Phi = \phi + 1 = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618033....$$

Über Jahrtausende sah man diese Prinzipien vornehmlich im Zusammenhang mit dem regulären Fünfeck, dessen Diagonalen einander im Goldenen Schnitt teilen. Oder hatte man die Alternativen vergessen?



Erst im Jahr 1982 stellte der Künstler und Amateur-Mathematiker George Odom[3] die Behauptung auf, dass auch die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und dessen Umkreis die Mittelparallele im Goldenen Schnitt teilt:



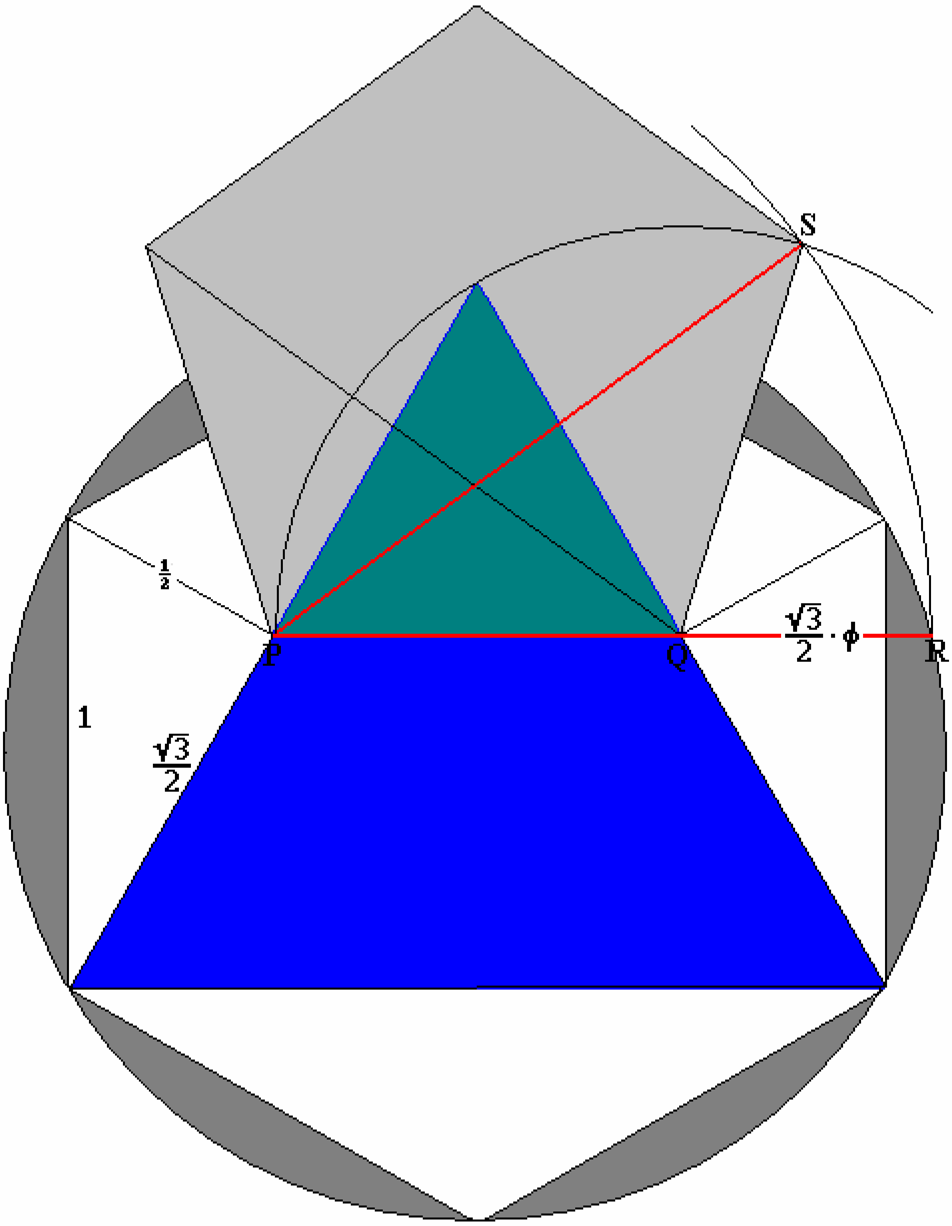
$$\frac{PR}{PQ}=\frac{PQ}{QR}=\Phi$$

Den Beweis liefert die Berechnung der Streckenlängen:

$$PR=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\Phi\,;\quad QR=\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\qquad QR=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\phi\,;$$

$$\frac{PR}{PQ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi\,;\qquad \frac{PQ}{QR}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{\phi}=\Phi\quad\text{q.e.d.}$$

Nun können wir die Strecke *PR* als Diagonale und den größeren Teil *PQ* als Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks verwenden.
Entstammt die Strecke *PR* dem regelmäßigen Sechseck der Seitenlänge 1, bzw. dem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $\sqrt{3}$ mit dem Umkreisradius 1, so hat die Diagonale des Fünfecks den Zahlenwert von $\sqrt{3}/2\cdot\Phi$. Die Seite *PQ* ist $\sqrt{3}/2$ lang.



Wir schlagen einen Kreis um P mit Radius $\sqrt{3}/2\cdot\Phi$ und einen Kreis um Q mit Radius $\sqrt{3}/2$. Der Punkt S befindet sich im Schnittpunkt beider Kreise. Analog verfahren wir, um auch die übrigen Punkte des regelmäßigen Fünfecks zu finden. So entsteht allein mit Zirkel und Lineal aus einem regulären Sechseck ein regelmäßiges Fünfeck.

---

[1] Euklid: Elemente Buch II, prop.11 Vol.I, S. 153; Buch VI prop. 30 Vol.II, S. 171 (hier erscheint zum ersten Mal die Bezeichnung "Teilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnis"). I.L. Heiberg ed., Teubner, Leipzig 1883-84.

[2] Diese Bezeichnung als Synonym für die " harmonische oder stetige oder göttliche Teilung" hatte der Mathematiker Martin Ohm (Bruder des Physikers Georg Simon Ohm) erst 1835 geprägt.

[3] George Odom, Problemstellung:"Let A and B the midpoints of the sides EF and ED of an equilateral triangle DEF. Extend AB to meet the circumcircle of DEF at C. Show that B divides AC according to the golden section." American Mathematical Monthly (AMM) **90**, p 482 (1983), Lösung: AMM **93**, p572 (1986).