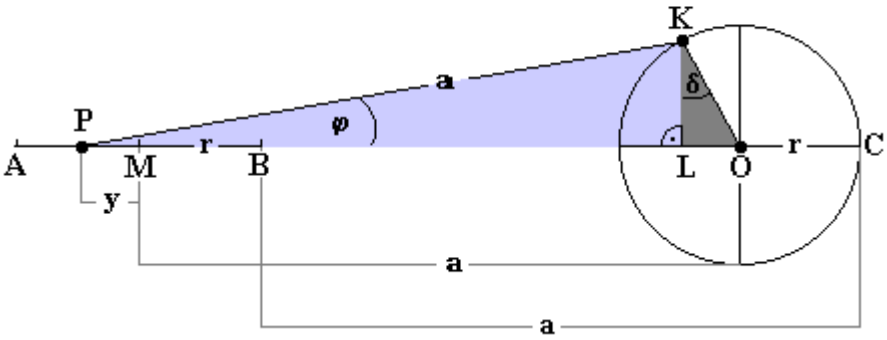
Über die Schwingungen des Kreuzkopfes einer Kolbenmaschine: Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung[1]

von
Christian Strutz*

Nach der Erfindung des Rades war wahrscheinlich die Umsetzung der Hin- und Herbewgung (Oszillation) in die Drehbewgung eines Rades (Rotation) oder umgekehrt, die Verwandlung einer Rotation in eine Oszillation, in Anbetracht seiner vielfältigen Anwendung eine der größten technischen Errungenschaften des Menschen.

In der Abbildung 1 ist der Kreuzkopf *P* einer Kolbenmaschine durch eine Pleuelstange der Länge *a* mit einer Kurbel *K* (Radius *r*) eines Schwungrades verbunden. So versetzt das Hin- und Her des Kolbens die Kurbel in ihre Kreisbewegung. Welchen Schwingungen ist dabei der Kreuzkopf ausgesetzt?

Abbildung 1
Übertragung der Hin- und Herbewegung des Kreuzkopfes auf die Drehbewegung einer Kurbel



A und *B* sind die Endstellungen. *M* ist die Mittellage des Kreuzkopfes: *AM* = *MB* = *r* . Der Punkt *L* ist die senkrechte Projektion des Punktes *K* auf die Strecke *AC*. Es entstehen die zwei rechtwinkligen Dreiecke *OKL* und *PKL* . So können wir die Längen der Strecken *OL* und *PL* trigonometrisch ermitteln:

$$\sin\delta = \frac{OL}{r} \;;\; OL = r\cdot\sin\delta$$

$$\cos\varphi = \frac{PL}{a} \;;\; PL = a\cdot\cos\varphi$$

Hat die Kurbel *K* die Stellung *C*, so fällt *P* mit *B* zusammen. Dadurch wird deutlich, dass die Strecke *CB* die Länge der Pleuelstange *a* hat. Somit ist auch *OM* gleich *a*. Allgemein setzt sich aber die Strecke *OP* aus den beiden Komponenten *a* und der positiven oder negativen Abweichung *MP* des Kreuzkopfes *P* von seiner Mittellage *M* zusammen.

$$OP = OL + PL = OM + MP$$

Bezeichnen wir die Abweichung des Kreuzkopfes *MP* mit *y*, und setzen wir in die letzte Gleichung auch die für die Strecken *OL* und *PL* ermittelten Werte ein, so entsteht die Bewegungsgleichung des Kreuzkopfes (1). Die abhängige Variable *y* gibt an, wo sich der Kreuzkopf *P* im Laufe einer gleichmäßigen Drehbewegung der Kurbel *K* befindet.

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} OP &= r\cdot\sin\delta + a\cdot\cos\varphi = a + y \\ y &= r\cdot\sin\delta + a\cdot\cos\varphi - a \\ y &= r\cdot\sin\delta + a\cdot(\cos\varphi - 1) \end{aligned}}$$

Die Gleichung (1) verdeutlicht, dass der Kreuzkopf nicht nur einer – zu erwartenden – Sinusschwingung der Amplitude *r* unterworfen ist, sondern zusätzlich auch einer Kosinusschwingung, deren Amplitude durch die Länge *a* der Pleuelstange bestimmt ist.
Die Abhängigkeit des Kosinus vom Winkel φ ersetzen wir durch seine Abhängigkeit vom Winkel δ . Dazu bedienen wir uns der Definition der Strecke *KL*.

Einerseits ist $\sin\varphi = \frac{KL}{a} \;;\; KL = a\cdot\sin\varphi$,

andererseits $\cos\delta = \frac{KL}{r} \;;\; KL = r\cdot\cos\delta$.

Gleichgesetzt ergeben beide Gleichungen

$$KL = a\cdot\sin\varphi = r\cdot\cos\delta \;;$$

$$\sin\varphi = \frac{r}{a}\cdot\cos\delta \;.$$

* Dr Christian Strutz, Steigstr. 26, D-88131 Lindau Bodensee, Germany. eMail Strutz_Christian@t-online.de

Damit wird deutlich, dass bei Abhängigkeit vom Winkel δ das Verhältnis zwischen dem Radius *r* der Kurbel und der Länge *a* der Pleuelstange ausschlaggebend ist. Da in der Regel der Radius der Kurbel viel kleiner ist als die Pleuelstange, ist der Quotient $(r/a) < 1$. Wegen $\cos\varphi = \sqrt{1-(\sin\varphi)^2}$, entsteht der Ausdruck $\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2}$, den wir jetzt in die Formel (1) einbauen:

(1.1) $$\boxed{y = r\cdot\sin\delta + a\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2}-1\right)}$$

Das Quadrat $\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2$ ist wegen $\frac{r}{a} < 1$ viel kleiner als 1, so dass wir getrost die Wurzel $\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2}$ mit $1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2$ approximieren können.

Die Bewegungsgleichung lautet dann:

(1.2) $$\boxed{\begin{aligned} y &= r\cdot\sin\delta + a\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{a}\cdot\cos\delta\right)^2-1\right) \\ &= r\cdot\sin\delta - \frac{r^2}{2a}\cdot(\cos\delta)^2. \end{aligned}}$$

Das Quadrat des Kosinus $(\cos\delta)^2$ lässt sich in den Ausdruck $½\cdot(\cos 2\delta`+1)$ mit doppeltem Winkel δ verwandeln, so dass wir die Bewegungsgleichung nochmals umformen können:

(1.3) $$\boxed{y = r\cdot\sin\delta - \frac{r^2}{4a}\cdot(\cos 2\delta + 1)},$$

wobei wir es mit den grafisch unterscheidbaren Komponenten

$y_1 = r\cdot\sin\delta$ und $y_2 = r^2/4a\cdot(\cos 2\delta + 1)$

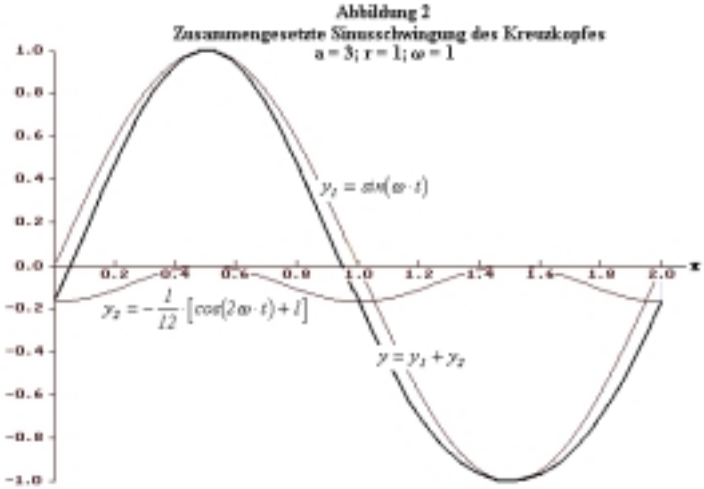
zu tun haben.

T ist die Zeit, die die Kurbel für einen vollen Umlauf von *360º = 2π* benötigt. In der Abbildung 2 und in den folgenden Grafiken sind deshalb die Schwingungen des Kreuzkopfes in Einheiten von π dargestellt. Die Winkelgeschwindigkeit oder Frequenz ist definiert als $\omega = 2\pi/T$. Da sich die Kurbel kreisförmig bewegt, hängt die Größe des Winkels δ vom Zeitpunkt t ab. Der Ausdruck $\omega\cdot t$ ist wegen $\delta = 2\pi/T\cdot t = \omega\cdot t$ gleich bedeutend mit der Phase der Schwingung.

In der Gleichung (1.4) und in Abb.2 wird sichtbar, dass der Ausdruck $\cos(2\omega\cdot t)$ in der Gleichung (1.4) die doppelte Frequenz oder „Oktave“ als „Oberton“ enthält.

(1.4) $$\boxed{y = r\cdot\sin(\omega\cdot t) - \frac{r^2}{4a}\cdot\cos(2\omega\cdot t) - \frac{r^2}{4a}}$$

Als Koeffizient von $\cos(2\omega\cdot t)$ bewirkt der Quotient $-r^2/4a$ einen anfänglich negativen Ausschlag des Kosinus. Als y_2, kombiniert mit $-r^2/4a$ als linearem Glied, rutscht die Oktave insgesamt in den negativen Bereich der y-Achse.



Der nächste Schritt besteht darin, die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes, also Weg geteilt durch Zeit, als erste Ableitung der Bewegung nach der Zeit zu untersuchen.

(2) $$\boxed{\begin{aligned} v = y^{|} &= \frac{dy}{dt} = r\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + \frac{r^2}{4a}\cdot 2\omega\cdot\sin(2\omega\cdot t) \\ &= r\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + \frac{r^2}{2a}\cdot\omega\cdot\sin(2\omega\cdot t) \end{aligned}}$$

Die Abbildung 3 zeigt, dass die positiven und negativen Maxima der Geschwindigkeit als Kosinusschwingung in unmittelbarer Nähe der Mittelstellung *M* auftreten und dass die Oktave als Sinusschwingung die doppelte Amplitude im Vergleich zur Bewegungsgleichung aufweist. Als Nullpunkte erscheinen die Umkehrpunkte *A* und *B* bei $\pi/2$ und $3/2\cdot\pi$, in denen der Kreuzkopf

seine Richtungsänderung erfährt und sich deshalb während eines winzig kleinen Momentes nicht bewegt. Zu beobachten ist außerdem, dass die Oktave bis π, nahe dem Minimum, die Gesamtschwingung verstärkt, um dann, wegen ihrer doppelten Frequenz, die Schwingung bis zum Punkt 2π zu bremsen.

Am deutlichsten aber ist der Einfluß der Oktave bei der zweiten Ableitung, der Beschleunigung. Wie in der Gleichung (3) und der Abbildung 4 zu sehen, hat die Oktave im Vergleich zur Bewegungsgleichung den vierfachen Ausschlag.

Dieser wirkt sich bis $\pi/2$ verstärkend auf die Gesamtschwingung aus, läuft aber dann bei $3/2 \cdot \pi$ dem Maximum der negativen Sinusschwingung genau entgegen, so dass die Gesamtschwingung eine „Delle“ bekommt und „unrund“ läuft.

(3)

$$b = y^{||} = \frac{dv}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) + \frac{r^2}{4a} \cdot 4\omega^2 \cdot cos(2\omega \cdot t)$$
$$= -r \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) + \frac{r^2}{a} \cdot \omega^2 \cdot cos(2\omega \cdot t)$$

Die Unwucht können wir durch eine Verringerung des Koeffizienten der Oktave beseitigen, d.h. durch die Verlängerung der Pleuelstange bei gleichbleibendem Kurbelradius. Die Abbildung 5 zeigt diesen Zusammenhang.

Einen Umschwung erreichen wir schon bei der Erweiterung der Proportion *1:3* auf das Doppelte, nämlich 1*:6*. Die weitere Verdopplung der Pleuelstange auf *1:12* zeigt aber nur noch eine unbedeutende Glättung der Kurve.

Abbildung 4
Zusammengesetzte Beschleunigungsschwingung
a = 3; r = 1; ω = 1

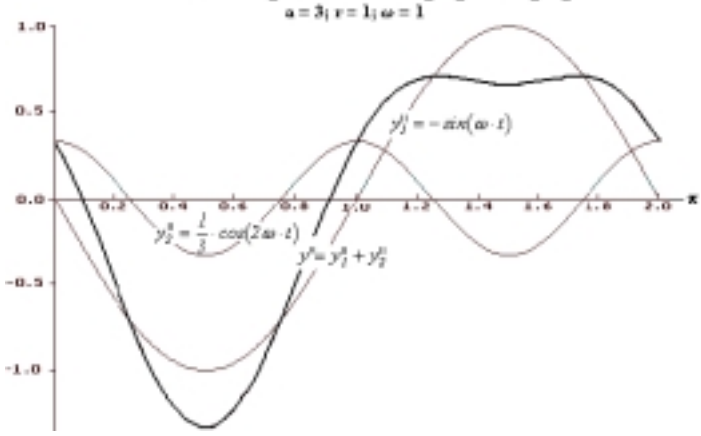
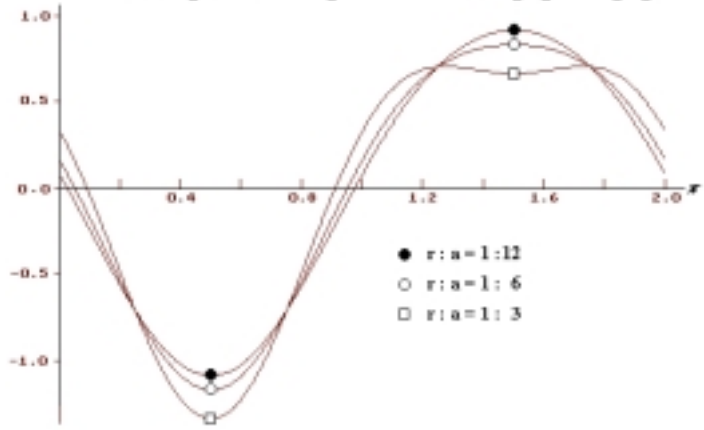


Abbildung 5
Wirkung der Erweiterung des Verhältnisses zwischen dem Kurbelradius *r* und der Länge der Pleuelstange *a* auf die Beschleunigungsschwingung



[1] Der Inhalt dieser Arbeit stammt weitestgehend aus: KÜHLEIN, T. 1977: Integralrechnung II, Anwendungen. Mentor Repetitorien No. 36, München.