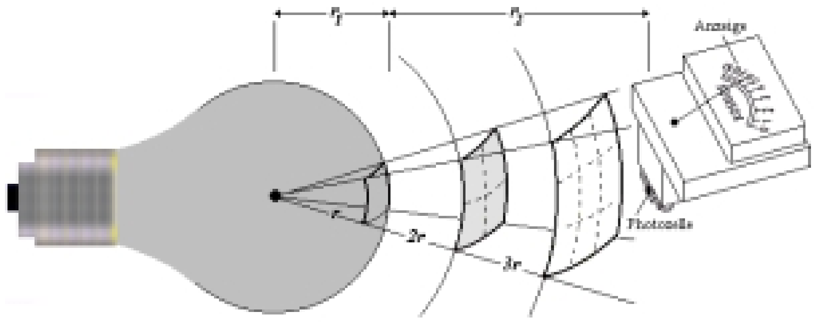
Das Entfernungsquadratgesetz: Das Leuchten einer Glühbirne als Modell für die Strahlung der Sonne

Christian Strutz

Je mehr wir uns von einer Lampe entfernen, desto weniger blendet sie uns. Diese allgemeine Erfahrung wollen wir uns im Experiment bestätigen lassen. Die Anleitung des KOSMOS-Baukastens SOLARTEC liefert uns dafür die Einzelheiten (Abb.1). Leider haben es die Autoren dieser Anleitung vermieden, das rechnerische Rüstzeug zur Auswertung dieses Versuchs mitzuliefern. Dies will ich mit der vor-liegenden Arbeit nachholen. Wir werden sehen: Mathematik macht Spaß, besonders, wenn wir wissen, wozu wir sie brauchen: zur Wahrheitsfindung.

Abbildung 1
Versuchsaufbau

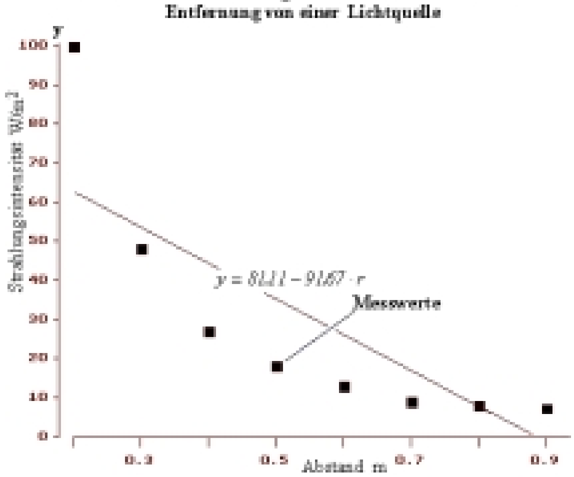


Wir benötigen das Licht einer 60 Watt Glühbirne und eine mit einem Potentiometer verbundene Photozelle in einem ansonsten möglichst abgedunkelten Raum. Im Abstand von 20 cm justieren wir das Potentiometer auf den Skalenwert 10, was etwa der Intensität von 100 Watt pro Quadratmeter entspricht. Jetzt entfernen wir die Photozelle von der Glühbirne in 10cm-Schritten bis 90 cm, lesen den Skalenwert ab und multiplizieren ihn mit 10, um in der jeweiligen Entfernung eine Messung der Strahlungsintensität in W/cm^2 zu erhalten. Die Tabelle 1 zeigt die Messergebnisse.

Tabelle 1
Messwerte von Strahlungsintensitäten in zunehmenden Abständen von einer Lichtquelle

Abstand cm	Strahlungs-intensität W/m^2
20	100
30	48
40	27
50	18
60	13
70	9
80	8
90	7

Abbildung 2
Messwerte für Strahlungsintensität in fortschreitender Entfernung von einer Lichtquelle



Die Zahlen verdeutlichen den zunächst rapiden Schwund an Strahlungsintensität im Bereich 100 bis 60 cm, der sich dann im Bereich ab 70 cm zu stabilisieren scheint.
Die Abb. 2 zeigt den grafischen Verlauf der Messpunkte. Verbänden wir die Punkte miteinander, so würde daraus die Figur einer Hyperbel entstehen. Wir wollen aber zunächst den von uns eingangs vermuteten linearen Zusammenhang ‘je mehr Abstand desto weniger Strahlung’ analysieren.
Dazu bedienen wir uns der linearen Korrelations-Regressions-Rechnung, wie wir sie in jedem PC-Programm mit Tabellenkalkulation vorfinden. Die statistische Auswertung der Messwerte ist dann gültig, wenn die Daten gleichmässig verteilt sind und wenn sich die Beziehung zwischen der Strahlungsintensität als abhängiger Variable *y* und dem Abstand *r* von der Strahlungsquelle als

unabhängiger Variable x als eine gerade Linie erscheint, die in der Statistik Regressionsgerade heißt:

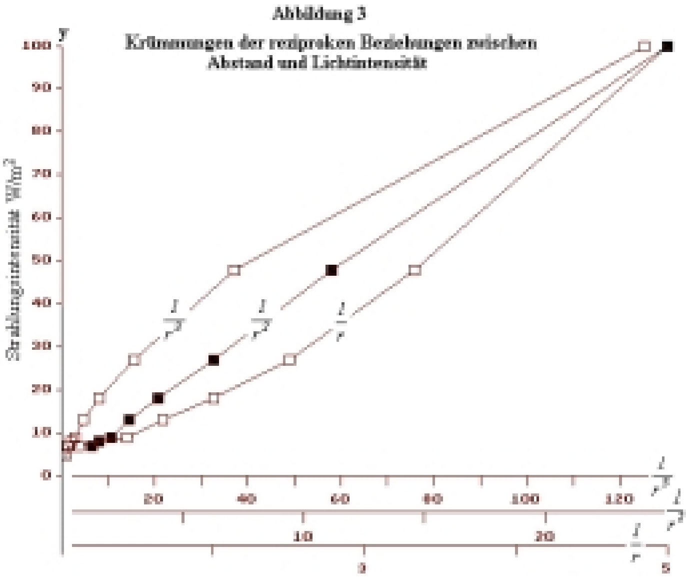
(1) $$y = a + b \cdot x\,.$$

Die Konstante a bestimmt den Achsenabschnitt auf der y-Achse, wenn x den Wert Null hat. Die Steigung ist durch den Regressionskoeffizienten b festgelegt. In unserem Fall bestimmt er, um wieviele Einheiten sich die Lichtintensität in W/cm^2 durch einen zusätzlichen Zentimeter Abstand ändert. Bei der Beziehung ‘je mehr *x*... desto mehr *y*’ erhält b ein positives, bei ‘je mehr ... desto weniger’ ein negatives Vorzeichen.

Die Abb.2 zeigt die Regressionsgerade für die lineare Beziehung zwischen Abstand und Strahlung mit der Formel $y = 81.11 - 91.67 \cdot r$. Dieses Ergebnis sagt, dass die Strahlungsintensität bei $r = 0$ den Wert von 81 W/m^2 hat und dass pro Abstands-Meter die Intensität um etwa 92 W/m^2 sinken soll, wir uns also bei 1 m Distanz im negativen Bereich befänden. Das kann nicht sein!

Das Maß für die Enge einer Beziehung oder die Gestrecktheit einer Punktewolke ist der Korrelationskoeffizient oder – mit viel höherer Genauigkeit – dessen Quadrat, das Bestimmtheitsmaß B, mit $0<B<1$. Die Tab.2 zeigt, dass das Bestimmtheitsmaß bei der direkten Beziehung nur 0.66 beträgt. Das bedeutet, dass lediglich 66 Prozent der Variation der Lichtintensität auf den Abstand von der Lichtquelle zurückzuführen ist. Eine Bestätigung finden wir darin, dass die Regressionsgerade nur den Messpunkt 80|8 trifft. Wir aber suchen eine möglichst hundertprozentige Ursache-Wirkungs-Beziehung. Diese müßte dann in einer vollständigen Linearisierung der Beziehung zwischen der Entfernung von der Lichtquelle und der Strahlungsintensität ihren Ausdruck finden.

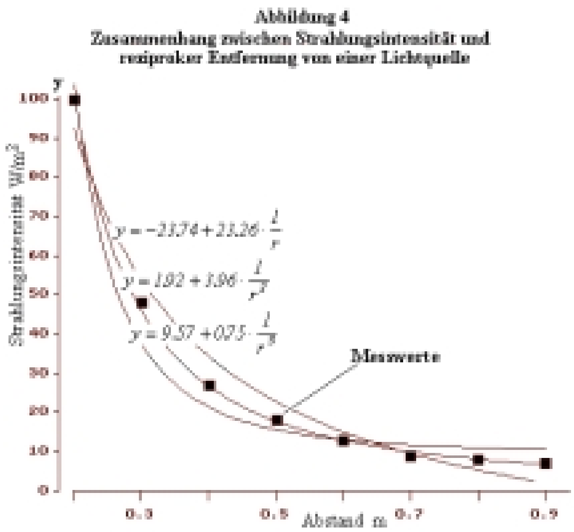
Deshalb müssen wir uns nach einer anderen Relation umsehen, die sowohl das Prinzip ‘je mehr Abstand desto weniger Helligkeit’ als auch die spezielle Krümmung beinhaltet, hinter der wir eine Hyperbel vermuten. Hier bieten sich die Kehrwerte des Abstandes in der Form von $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ an. Aus einer Transformation der x-Werte in ihren einfachen, quadratischen oder kubischen Kehrwert folgt, dass besonders weite Abstände einen besonders kleinen $1/r$ Wert haben und umgekehrt, dass also der Regressionskoeffizient ein positives Vorzeichen bekommt und dass der Achsenabschnitt a ein Grenzwert für die Strahlung in ‚unendlicher’ Entfernung ist. Die Abb.3 zeigt die Messpunkte für die drei reziproken Relationen mit den Abszissen $1/r$, $1/r^2$ und $1/r^3$, wobei wir diejenige Relation bevorzugen, bei der die Messpunkte nahezu auf einer geraden Linie liegen.



Als Siegerin nach diesen Kriterien erweist sich die Relation $y = 1.92 + 3.96/r^2$ (Tab.2, Abb.4), die besagt, dass die Strahlung mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung zunimmt, wobei der Achsenabschnitt $a = 1.92$ W/m^2 wohl den Restbestand an Helligkeit im Raum wiedergibt. Damit haben wir das Entfernungsquadratgesetz wiederentdeckt: Die Ausbreitungsfläche des Lichts ist einer zentrischen Streckung unterworfen, mit der Folge, dass sich die Lichtintensität proportional zum Quadrat der Entfernung verdünnt (Abb.1).

Tabelle 2
Lineare und reziproke Beziehungen zwischen der Lichtintensität und dem Abstand von einer Lichtquelle

Abszissen-transformation	Achsen-abschnitt	Regressions-koeffizient	Bestimmtheits-mass	Schätz-fehler
r	81.11	-91.67	0.66	19.15
1/r	-23.74	23.26	0.97	5.76
$1/r^2$	**1.92**	**3.96**	**1.00**	**1.01**
$1/r^3$	9.57	0.75	0.97	5.62
$1/(4\pi r^2) \cdot 1/(60/49.77)$	**1.92**	**60.00**	**1.00**	**1.01**



Was aber bedeutet der Regressionskoeffizient $b = 3.96$? Dazu müssen wir uns noch einmal die Abb.1 vornehmen: Die darin dargestellte zentrische Streckung betrifft nur einen Teil des sich nach allen Richtungen gleichmäßig und kugelförmig – also isotrop – ausbreitenden Lichts. Ausgangspunkt ist der weißglühende Draht im Inneren der Birne. Die Formel für die Fläche einer Kugel lautet:

(2) $$F = 4\pi \cdot r^2 \;.$$

Die Verdünnung der Leuchtkraft L , ausgedrückt als I , ist dann umgekehrt proportional zur Kugelfläche im Abstand r vom Ursprung der Strahlung.

(3) $$I = \frac{L}{F}$$
$$I = \frac{1}{4\pi} \cdot L \cdot \frac{1}{r^2}$$

Im Vergleich zu $y = 1.92 + 3.96/r^2$ fällt in der aufgelösten Form der Gleichung (3) der konstante Faktor $1/4\pi$ auf. Dieser muß also schon im Koeffizienten $b = 3.96$ W enthalten sein. Multiplizieren wir b mit 4π, liegen wir zwar mit 49.77 Watt in der richtigen Größenordnung, kommen aber noch nicht auf die für die Glühbirne ausgewiesenen 60 Watt. Dies erreichen wir erst wenn wir per Korrekturfaktor brücksichtigen, dass das Licht vom glühenden Wolframdrähtchen bis zum Glas der Glühbirne den Weg r_1 zurücklegt und dort durch die Absorption des Glases, die sich durch Hitze bemerkbar macht, Energie verliert. Nach statistischer Auswertung und gerechtfertigter Korrektur (Tab.2) lautet nun unsere Formel für die Lichtintensität im Abstand r von einer 60W Glühbirne:

$$I = 1.92 + \frac{0.83}{4\pi} \cdot 60 \cdot \frac{1}{r^2} \quad \text{W/m}^2.$$

Im Gegensatz zur Glühbirne strahlt die Sonne als glühender Feuerball mit der gesamten Oberfläche ihrer $T = 5780$ K heißen Photosphäre. Ihre immense Leuchtkraft L_s beträgt nach der Gleichung (4)

(4) $$L_s = \sigma \cdot T^4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_S^2 \text{ W;}$$

$3.85 \cdot 10^{23}$ W, wobei die STEFAN-BOLTZMANN Konstante mit $\sigma = 5.67051 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2 \cdot$ K^4) und der Sonnenradius $r_s = 6.95 \cdot 10^8$ m zur Berechnung der Kugelfläche der Sonne berücksichtigt sind. Teilen wir jetzt L_s durch die Kugeloberfläche mit dem Radius einer Astronomischen Einheit r_{AE}, dem durchschnittlichen Abstand zwischen Sonne und Erde ($r_{AE} = 1.496 \cdot 10^{11}$ m), so erhalten wir nach den Gleichungen (5a) oder (5b)

(5a) $$I_s = \sigma \cdot T^4 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r_S^2}{4 \cdot \pi \cdot r_{AE}^2} \text{ W/m}^2$$
$$I_s = \sigma \cdot T^4 \cdot \left(\frac{r_S}{r_{AE}} \right)^2 \text{ W/m}^2$$

(5b) $$I_s = \frac{L_s}{4 \cdot \pi \cdot r_{AE}^2} \text{ W/m}^2$$

die uns bekannte Solarkonstante $I_s = 1366$ W/m^2 ohne Berücksichtigung der Absorption durch die Erdatmosphäre.
Die Gleichungen verdeutlichen, dass wir entweder die Temperatur des (schwarzen) Strahlers kennen müssen (5a) oder wir – wie im Fall der Glühbirne – von einer vorgegebenen Leistung (5b) ausgehen. In beiden Fällen spielt die Kugelgeometrie die entscheidende Rolle, obwohl sie nach Kürzen von 4π in (5a) nicht mehr sichtbar ist.
Wenn wir aber im COULOMBschen Gesetz oder in der Allgemeinen Relativitätstheorie der Konstanten 4π wiederbegegnen, so sollte uns dies nicht wundern: Die kugelförmige Ausbreitung der Wellen ist ihr gemeinsames Merkmal.

Quellen

Jan Handwerker und Detlef Pukrop 1996: Experimentieranleitung KOSMOS SOLARTEC. Franckh-Kosmos Verlag, Stuttgart.
C. Strutz 2000: Die Konstanten in den Strahlungsgesetzen. Praxis der Naturwissenschaften Physik, 1/49,43. Aulis Verlag Deubner, Köln.